

Matemática

M15 – Análise Combinatória

p. 48

1 Lançam-se dois dados simultaneamente: um vermelho e outro branco.

- a) Quantos e quais são os resultados possíveis?
 b) Quais são as somas possíveis? Quantas são?

Sugestão: construa uma tabela de dupla entrada.

Resolução:

a)

Vermelho \ Branco	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

Para cada face do dado branco, temos todas as faces do dado vermelho.

$6 \cdot 6 = 36$ resultados

- b) $1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, 1 + 3 = 4, 1 + 4 = 5, 1 + 5 = 6, 1 + 6 = 7,$
 $2 + 6 = 8, 3 + 6 = 9, 4 + 6 = 10, 5 + 6 = 11, 6 + 6 = 12$
 11 somas possíveis

2 Mariana gosta de 5 sabores de sorvete: abacaxi, coco, limão, chocolate e graviola. Quantas possibilidades ela tem para escolher duas bolas entre os cinco sabores, sabendo que:

- a) as duas bolas são do mesmo sabor? **5**
 b) as duas bolas são de sabores diferentes e não importa a ordem em que são colocadas na casquinha? **10**
 c) as duas bolas são de sabores diferentes e importa a ordem em que são colocadas na casquinha? **20**

Resolução:

Sejam A, C, L, Ch e G, respectivamente, abacaxi, coco, limão, chocolate e graviola.

- a) A, A; C, C; L, L; Ch, Ch; G, G 5 possibilidades

- b) 
 $5 \cdot 4 = 20$ possibilidades; porém, se a ordem não importa, $\frac{20}{2} = 10$ possibilidades.

- c) $5 \cdot 4 = 20$

3 Oito cavalos disputam uma corrida. Quantas são as possibilidades de chegada para os 3 primeiros lugares? 336

Resolução:

$$\text{Possibilidades: } \frac{1^\circ}{8} \frac{2^\circ}{7} \frac{3^\circ}{6}$$

$$\text{PM} \rightarrow 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336 \text{ possibilidades}$$

4 (UFBA) Numa eleição para a diretoria de um clube concorrem 3 candidatos a diretor, 2 a vice-diretor, 3 a primeiro-secretário e 4 a tesoureiro. O número de resultados possíveis da eleição é:

a) 4

c) 72

e) 12!

b) 24

d) 144

Resolução:

Pelo princípio multiplicativo, temos:

$$n = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \therefore n = 72$$

5 (UFAL) Quantos números inteiros positivos divisíveis por 5, de 4 algarismos distintos, podem ser escritos com os algarismos 1, 3, 5, 7, 9? 24

Resolução:

Se o número é divisível por 5, deve terminar pelo algarismo 5.

$$\text{Possibilidades: } \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{5}$$

$$A_{4,3} = \frac{4!}{1!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ números}$$

6 Usando-se 5 dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, sem repeti-los, quantos números pares podemos formar? 1080

Resolução:

O número, sendo par, deve terminar em 2, 4 ou 6.

$$\text{Possibilidades: } \frac{6}{6} \frac{5}{5} \frac{4}{4} \frac{2}{3}$$

$$\text{Possibilidades: } \frac{6}{6} \frac{5}{5} \frac{4}{4} \frac{4}{3}$$

$$\text{Possibilidades: } \frac{6}{6} \frac{5}{5} \frac{4}{4} \frac{6}{3}$$

$$\text{PM} \rightarrow 3 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) = 1080 \text{ números}$$

7 Num programa transmitido diariamente, uma emissora de rádio toca sempre as mesmas 10 músicas, mas nunca na mesma ordem. Quantos séculos, aproximadamente, serão necessários para esgotar todas as seqüências dessas músicas? $\approx 99,5$

Resolução:

$$\overline{10} \overline{9} \overline{8} \overline{7} \overline{6} \overline{5} \overline{4} \overline{3} \overline{2} \overline{1}$$

$$\text{PM} \rightarrow 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800 \text{ dias}$$

$$1 \text{ século} \approx 36500 \text{ dias}$$

$$n \approx \frac{3628800}{36500} \approx 99,5 \text{ séculos}$$

8 (FGV-SP) As atuais placas de licenciamento de automóveis constam de sete símbolos, sendo três letras, dentre as 26 do alfabeto, seguidas de quatro algarismos. 158 184 000

- a) Quantas são as placas distintas, sem o algarismo zero na primeira posição reservada aos algarismos?
 b) No conjunto de todas as placas distintas possíveis, qual a porcentagem daquelas que têm as duas primeiras letras iguais? $\approx 3,85\%$

Resolução:

a) Possibilidades: $\overbrace{26}^{\text{letras}} \overbrace{26}^{\text{letras}} \overbrace{26}^{\text{letras}} \overbrace{9}^{\text{algarismos}} \overbrace{10}^{\text{algarismos}} \overbrace{10}^{\text{algarismos}} \overbrace{10}^{\text{algarismos}}$

$$\text{PM} \rightarrow 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 158184000 \text{ placas}$$

b) Possibilidades: $\overbrace{26}^{\text{letras}} \overbrace{26}^{\text{letras}} \overbrace{10}^{\text{algarismos}} \overbrace{10}^{\text{algarismos}} \overbrace{10}^{\text{algarismos}} \overbrace{10}^{\text{algarismos}}$

$$\text{PM} \rightarrow 26 \cdot 26 \cdot 10^4$$

O total de placas, pelo PM = $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10^4$

$$x = \frac{26 \cdot 26 \cdot 10^4}{26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10^4} = \frac{1}{26} \approx 3,85\%$$

9 Simplifique as expressões:

a) $\frac{n!}{(n-1)!} = n$ b) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!} = n(n+1)(n+2)$

Resolução:

a) $\frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

b) $\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = n(n+1)(n+2)$

10 (UFG) Utilizando as notas dó, ré, mi, fá, sol, lá e si, um músico deseja compor uma melodia com 4 notas, de modo que tenha notas consecutivas distintas. Por exemplo: {dó, ré, dó, mi} e {si, ré, mi, fá} são melodias permitidas, enquanto {ré, ré, dó, mi} não, pois possui duas notas ré consecutivas.

a) Escreva cinco melodias diferentes, de acordo com o critério dado. **resposta pessoal**

b) Qual o número de melodias que podem ser compostas nessas condições? **1512**

Resolução:

b) Possibilidades: $\overline{7} \overline{6} \overline{6} \overline{6}$

$$7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1512 \text{ melodias}$$

11 (UCSal-BA) Um código para leitura ótica é constituído por 6 barras, brancas ou pretas. Nenhum código tem barras de uma só cor. Veja dois exemplos desses códigos:



Quantos desses códigos, distintos entre si, podem ser formados?

a) 128

c) 62

e) 16

b) 64

d) 32

Resolução:



$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64; \text{ como nenhum código tem barras de uma só cor, } n = 64 - 2 = 62$$

12 (Vunesp-SP) Um turista, em viagem de férias pela Europa, observou pelo mapa que, para ir da cidade A à cidade B, havia três rodovias e duas ferrovias e que, para ir de B até uma outra cidade, C, havia duas rodovias e duas ferrovias. O número de percursos diferentes que o turista pode fazer para ir de A até C, passando pela cidade B e utilizando rodovia e trem obrigatoriamente, mas em qualquer ordem, é:

a) 9

c) 12

e) 20

b) 10

d) 15

Resolução:

Como ele deve usar rodovia e ferrovia, se de A para B ele usar rodovia, de B a C o trajeto deverá ser cumprido por ferrovia. Por outro lado, se de A para B o turista viajar de ferrovia, ele cumprirá o trecho de B para C por uma rodovia. Logo, pelo princípio multiplicativo:

$$n = \underbrace{3 \cdot 2}_{\text{rodovia + ferrovia}} + \underbrace{2 \cdot 2}_{\text{ferrovia + rodovia}} \therefore n = 10$$

rodovia + ferrovia ← → ferrovia + rodovia

13 Determine o conjunto solução da equação: $\frac{(n+2)!(n-2)!}{(n+1)!(n-1)!} = 4$ {2}

Resolução:

$$\frac{(n+2)(n+1)!(n-2)!}{(n+1)!(n-1)(n-2)!} = 4$$

$$\frac{n+2}{n-1} = 4 \rightarrow 4n-4 = n+2 \rightarrow n=2 \rightarrow S = \{2\}$$

14 Resolva a equação: $(x + 1)! = x! + 6x$. $\{0, 3\}$

Resolução:

$$(x + 1)x! = x! + 6x \rightarrow (x + 1 - 1)x! = 6x \rightarrow xx! = 6x$$

$$x = 3 \text{ ou } x = 0$$

$$S = \{0, 3\}$$

15 Considere a função $f(x) = \frac{2x! - (x + 1)!}{2(x - 1)!}$.

a) Determine o domínio dessa função. \mathbb{N}^*

b) Resolva a inequação $f(x) \geq -6$. $\{1, 2, 3, 4\}$

Resolução:

a) $x \geq 0, x + 1 \geq 0$ e $x - 1 > 0 \therefore x \geq 1$

$$D = \mathbb{N}^*$$

b) $\frac{2x! - (x + 1)!}{2(x - 1)!} \geq -6$

$$\frac{2x(x-1)! - (x+1)x(x-1)!}{2(x-1)!} \geq -6 \rightarrow \frac{2x - x^2 - x}{2} \geq -6$$

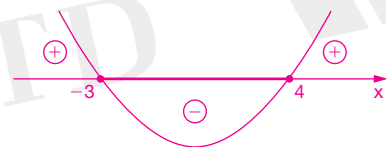
$$\frac{-x^2 + x + 12}{2} \geq 0$$

$$x^2 - x - 12 \leq 0$$

$$f(x) = x^2 - x - 12$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x - 4)(x + 3) = 0 \begin{cases} x' = 4 \\ x'' = -3 \end{cases}$$



$$D = \mathbb{N}^*$$

$$S = \{1, 2, 3, 4\}$$

16 (Fafi-BH) Sabendo que $8n! = \frac{(n + 2)! + (n + 1)!}{n + 1}$, o valor de n é:

a) 2

c) 4

e) 6

b) 3

d) 5

Resolução:

$$8n! = \frac{(n + 2)! + (n + 1)!}{n + 1} \rightarrow 8n! = \frac{(n + 2) \cdot (n + 1) \cdot n! + (n + 1) \cdot n!}{n + 1}$$

$$8n! = \frac{(n + 1) \cdot n!}{n + 1} \cdot (n + 2 + 1) \rightarrow n + 3 = 8 \therefore n = 5$$

- 17** (Unicruz-RS) Se tenho a expressão $2A_5^3 + 4P_4 - 8C_6^3$, o cálculo dessa resultará:
- a) 56 c) 28 e) 24
 b) 65 d) 32

Resolução:

$$2A_5^3 + 4P_4 - 8C_6^3 = 2 \cdot \frac{5!}{2!} + 4 \cdot 4! - 8 \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!}$$

$$2A_5^3 + 4P_4 - 8C_6^3 = 120 + 96 - 160 = 56$$

- 18** (UFPR) Dentre todos os números de quatro algarismos distintos formados com algarismos pertencentes ao conjunto $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, quantos são divisíveis por 2? **360**

Resolução:

Para ser divisível por 2, a representação decimal do número deve terminar em 4, 6 ou 8.

$$3 \cdot A_{6,3} = 3 \cdot \frac{6!}{3!} = 3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 360 \text{ números}$$

- 19** Cinco homens e uma mulher estão em uma sala de espera, onde há apenas um banco de cinco lugares. De quantas maneiras diferentes os homens podem se sentar, nunca deixando em pé a mulher? **600**

Resolução:

M _____

$$A_{5,4} = \frac{5!}{1!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$$

Como a mulher pode sentar em qualquer um dos 5 lugares, temos: $5 \cdot 120 = 600$ maneiras.

- 20** Quantos são os números compreendidos entre 2000 e 3000, compostos por algarismos distintos escolhidos entre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9? **336**

Resolução:

2 _____

$$A_{8,3} = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336 \text{ números}$$

21 (UFCE) Considere os números inteiros maiores que 64 000 que possuem 5 algarismos, todos distintos, e que não contêm os dígitos 3 e 8. A quantidade desses números é:

- a) 2160 c) 1440 e) n.d.a.
 b) 1320 d) 2280

Resolução:

Partindo de 64 000, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{fixando } 64 \rightarrow \boxed{64} \dots\dots\dots A_{6,3} \\ \text{fixando } 65 \rightarrow \boxed{65} \dots\dots\dots A_{6,3} \\ \text{fixando } 67 \rightarrow \boxed{67} \dots\dots\dots A_{6,3} \\ \text{fixando } 69 \rightarrow \boxed{69} \dots\dots\dots A_{6,3} \end{array} \right\} 4 \cdot A_{6,3}$$

Com o mesmo raciocínio, temos, começando por 7: 70, 71, 72, 74, 75, 76, 79 $\rightarrow 7 \cdot A_{6,3}$

Idem para os números que começam por 9: 90, 91, 92, 94, 95, 96, 97 $\rightarrow 7 \cdot A_{6,3}$

$$\text{Assim, } 4 \cdot A_{6,3} + 7 \cdot A_{6,3} + 7 \cdot A_{6,3} = 18 \cdot A_{6,3} = 18 \cdot \frac{6!}{3!} = 2160$$

22 Quantos anagramas da palavra PROBLEMA:

- a) começam com R? 5040
 b) começam com P e terminam com M? 720
 c) começam com vogal? 15 120
 d) terminam com consoante? 25 200

Resolução:

a) R _____
 $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5040$ anagramas

b) P _____ M
 $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ anagramas

c) O _____
E
A
 $3 \cdot 7! = 15120$ anagramas

d) _____ P
R
B
L
M
 $5 \cdot 7! = 25200$ anagramas

23 (PUC-SP) Formados e colocados em ordem crescente todos os números naturais de quatro algarismos distintos obtidos com os algarismos 1, 3, 5 e 7, que lugar ocupa o número 5731? 18^o

Resolução:

Começando com:	1	—	—	—	$P_3 = 3 \cdot 2 = 6$
	3	—	—	—	$P_3 = 3 \cdot 2 = 6$
	5	1	—	—	$P_2 = 2$
	5	3	—	—	$P_2 = 2$
	5	7	1	3	$P_0 = 1$
	5	7	3	1	

$$6 + 6 + 2 + 2 + 1 = 17$$

5731 ocupa o 18^o lugar.

p. 57

24 (UFOP-MG) Numa classe de 10 estudantes universitários, um grupo de 4 será selecionado para uma excursão. De quantas maneiras o grupo poderá ser formado, se dentre os estudantes existe um casal que não pode ser separado? 98

Resolução:

Considerando o casal como uma só pessoa, temos $C_{8,2}$ grupos com esse casal.

$$C_{8,2} + C_{8,4} = \frac{8!}{2!} + \frac{8!}{4!3!} = \frac{8 \cdot 7}{2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 98 \text{ maneiras}$$

25 (ITA-SP) Se colocarmos em ordem crescente todos os números de 5 (cinco) algarismos distintos, obtidos com 1, 3, 4, 6 e 7, a posição do número 61473 será:

- a) 76^o c) 80^o e) n.d.a.
 b) 78^o d) 82^o

Resolução:

1	—	—	—	—	$P_4 = 4!$
3	—	—	—	—	$P_4 = 4!$
4	—	—	—	—	$P_4 = 4!$
6	1	3	—	—	$P_2 = 2!$
6	1	4	3	—	$P_1 = 1!$

$$3 \cdot 24 + 2 + 1 = 75$$

61473 será o 76^o número.

26 (UFSC) Calcule o número de anagramas da palavra CLARA em que as letras AR aparecem juntas e nessa ordem. 24

Resolução:

Considerando AR como se fosse uma letra só, temos:

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ anagramas}$$

27 (UFPEl-RS) Para realizar um bingo beneficente, uma associação solicitou a confecção de uma série completa de cartelas com 10 números cada uma, sem repetição, sendo utilizados números de 1 a 15. Calcule quantas cartelas foram confeccionadas. **3 003**

4		6		7
8	3		1	
	5	14	9	13

Resolução:

$$C_{15,10} = \frac{15!}{5! 10!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 3\,003 \text{ cartelas}$$

- 28** (Cefet-PR) Um pintor dispõe de 6 cores diferentes de tinta e pode misturá-las duas a duas, em proporções iguais, para obter novos tons. O total de novas cores que possuirá, dessa forma, será igual a:
- a) 15
 - b) 30
 - c) 36
 - d) 21
 - e) 360

Resolução:

Seja n o número de novos tons. Então: $n = C_{6,2} \rightarrow n = \frac{6!}{4! 2!} \therefore n = 15$

- 29** (FGV-SP) Um administrador de um fundo de ações dispõe de ações de 10 empresas para compra, entre elas as da empresa R e as da empresa S .
- a) De quantas maneiras ele poderá escolher 7 empresas entre as 10? **120**
 - b) Se entre as 7 empresas escolhidas devem figurar obrigatoriamente as empresas R e S , de quantas formas ele poderá escolher as empresas? **56**

Resolução:

a) $C_{10,7} = \frac{10!}{3! 7!} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120 \text{ maneiras}$

b) $C_{8,5} = \frac{8!}{3! 5!} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56 \text{ formas}$

- 30** (EEM-SP) De quantas maneiras é possível ordenar 2 livros de Matemática, 3 de Português e 4 de Física, de modo que os livros de uma mesma matéria fiquem sempre juntos e, além disso, os de Física fiquem, entre si, sempre na mesma ordem? **72**

Resolução:

2M, 3P, 4F

$$2! \cdot 3! \cdot 1! = 12$$

As coleções podem trocar de posição; daí, temos:

$$3! \cdot 12 = 72 \text{ maneiras}$$

31 (UFSC) Um campeonato de futebol de salão é disputado por várias equipes, jogando entre si, turno e retorno. Sabendo-se que foram jogadas 272 partidas, determine o número de equipes participantes. 17

Resolução:

$$C_{n,2} = 136$$

$$\frac{n!}{(n-2)! 2!} = 136 \rightarrow \frac{n(n-1)(\cancel{n-2}!) }{(\cancel{n-2})! 2} = 136$$

$$n^2 - n = 272 \rightarrow n^2 - n - 272 = 0 \left\{ \begin{array}{l} n' = 17 \\ n'' = -16 \text{ (não serve)} \end{array} \right.$$

Portanto, são 17 equipes.

32 (UFRJ) Uma partícula desloca-se sobre uma reta, percorrendo 1 cm para a esquerda, ou para a direita, a cada movimento. Calcule de quantas maneiras diferentes a partícula pode realizar uma seqüência de 10 movimentos terminando na posição de partida. 252

Resolução:

$$P_{10}^{5,5} = \frac{10!}{5! 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{5!}} = 252$$

33 (UEL-PR) Em uma floricultura, estão à venda 8 mudas de cravos e 12 mudas de rosas, todas diferentes entre si. Um cliente pretende comprar 3 mudas de cravos e 4 de rosas. De quantos modos ele pode selecionar as 7 mudas que quer comprar? 27720

Resolução:

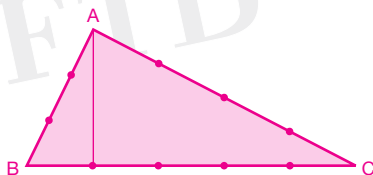
$${}^8C_3 \cdot {}^{12}C_4$$

$$C_{8,3} \cdot C_{12,4} = \frac{8!}{5! 3!} \cdot \frac{12!}{8! 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 27720 \text{ modos}$$

34 (UFG) Em um triângulo ABC marcam-se dois pontos no lado \overline{AB} , três no lado \overline{AC} e quatro no lado \overline{BC} , distintos dos vértices. O número total de circunferências que passam por três desses pontos será:

- a) 84 c) 55 e) 24
 b) 79 d) 27

Resolução:



$$C_{9,3} = \frac{9!}{6! 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 84$$

Porém, no lado \overline{AC} temos 3 pontos colineares: $C_{3,3} = 1$.

No lado \overline{BC} , temos 4 pontos colineares: $C_{4,3} = 4$.

Assim: $84 - 1 - 4 = 79$ circunferências.

35 (Vunesp-SP) O setor de emergência de um hospital conta, para os plantões noturnos, com 3 pediatras, 4 clínicos gerais e 5 enfermeiros. As equipes de plantão deverão ser constituídas por 1 pediatra, 1 clínico geral e 2 enfermeiros. Determine:

- a) quantos pares distintos de enfermeiros podem ser formados; **10**
 b) quantas equipes de plantão distintas podem ser formadas. **120**

Resolução:

$$a) C_{5,2} = \frac{5!}{2! 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} = 10$$

$$b) C_{3,1} \cdot C_{4,1} \cdot C_{5,2} = 3 \cdot 4 \cdot 10 = 120$$

36 (Unicamp-SP) De quantas maneiras podem ser escolhidos 3 números naturais distintos, de 1 a 30, de modo que sua soma seja par? Justifique sua resposta. **2 030**

Resolução:

1, 2, 3, ..., 30

Para que a soma de três números seja par, temos as seguintes possibilidades:

$$I + I + P = P$$

$$P + P + P = P$$

Como de 1 a 30 temos 15 números pares e 15 números ímpares:

$$C_{15,2} \cdot C_{15,1} + C_{15,3} = \frac{15!}{13! 2!} \cdot \frac{15!}{14! 1!} + \frac{15!}{12! 3!} = \frac{15 \cdot 14}{2} \cdot 15 + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2} = 2\,030 \text{ maneiras}$$

37 (UFV-MG) Para emplacar automóveis, um município está autorizado a usar somente as letras A, B, C, D e E e os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, sendo cada placa constituída de três letras seguidas de quatro algarismos. Quantos automóveis poderão ser emplacados se, em cada placa, as letras não se repetirem e forem postas em ordem alfabética, e os algarismos puderem ser repetidos livremente? **6 250**

Resolução:

$$\overbrace{5 \ 5 \ 5 \ 5}^{C_{5,3}}$$

$$10 \cdot 5^4 = 6\,250 \text{ automóveis}$$

38 (Unesp-SP) Dez rapazes, em férias no litoral, estão organizando um torneio de voleibol de praia. Cinco deles são selecionados para escolher os parceiros e capitanear as cinco equipes a serem formadas, cada uma com dois jogadores.

- a) Nessas condições, quantas possibilidades de formação de equipes eles têm? **120**
 b) Uma vez formadas as cinco equipes, quantas partidas se realizarão, se cada uma das equipes deverá enfrentar todas as outras uma única vez? **10**

Resolução:

$$a) \overline{5} \ \overline{4} \ \overline{3} \ \overline{2} \ \overline{1}$$

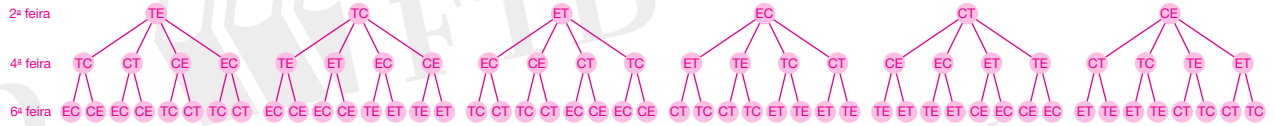
$$PM \rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ possibilidades}$$

$$b) C_{5,2} = \frac{5!}{3! 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ partidas}$$

39 (UERJ) Uma turma de pós-graduação tem aulas às segundas, quartas e sextas, das 13h 30min às 15 h e das 15h30min às 17 h. As matérias são Topologia, Equações Diferenciais e Combinatória, cada uma com duas aulas por semana, em dias diferentes. O número de modos diferentes de fazer o horário dessa turma é:

- a) 288 c) 36 e) 6
b) 48 d) 12

Resolução:



Logo, há 48 modos diferentes de montar o horário da turma.

p. 58

40 (UFPE-UFRPE) O segredo de um cofre é formado de uma seqüência de quatro dígitos distintos. Se o quarto dígito é o dobro do primeiro, determine o número N de possíveis segredos. Indique a soma dos dígitos de N . **224 segredos e soma 8**

Resolução:



Sendo o 4º dígito o dobro do primeiro, temos as quatro possibilidades e, para cada uma delas, $8 \cdot 7$ maneiras diferentes de completar o segredo; logo, há um total de $4 \cdot 56 = 224$ segredos diferentes para as condições solicitadas.

A soma dos dígitos de N será: $2 + 2 + 4 = 8$.

41 (Unifesp-SP) As permutações das letras da palavra PROVA foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de cinco letras em um dicionário. A 73ª palavra nessa lista é:

- a) PROVA c) RAPOV **e) RAOPV**
 b) VAPOR d) ROVAP

Resolução:

Listando em ordem alfabética os anagramas da palavra PROVA, teremos:

- 1) Começados com A: $P_4 = 4! = 24$
- 2) Começados com O: $P_4 = 4! = 24$
- 3) Começados com P: $P_4 = 4! = 24$

Até aí, seriam 72 ($24 + 24 + 24$) anagramas. O próximo (73º) será o primeiro anagrama começado com R, ou seja, RAOPV.

42 (FGV-SP) De um grupo de 8 pessoas, entre elas Antônio e Benedito, deseja-se escolher uma comissão com 4 pessoas. O número de comissões que podem ser formadas nas quais Antônio participa e Benedito não é igual a:

- a) 15
b) 24

- c) 30
d) 20

- e) 36

Resolução:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} = 20$$

O número de comissões com 4 pessoas de que Antônio participa e Benedito não é 20.

43 (MACK-SP) Uma padaria faz sanduíches, segundo a escolha do cliente, oferecendo 3 tipos diferentes de pães e 10 tipos diferentes de recheios. Se o cliente pode escolher o tipo de pão e 1, 2 ou 3 recheios diferentes, o número de possibilidades de compor o sanduíche é:

- a) 525**
b) 630

- c) 735
d) 375

- e) 450

Resolução:

Para cada uma das três opções do tipo de pão, o cliente terá para escolha do recheio:

$$C_{10,1} + C_{10,2} + C_{10,3} = \frac{10!}{9!1!} + \frac{10!}{8!2!} + \frac{10!}{7!3!} = 10 + 45 + 120 = 175$$

O número de possibilidades do cliente para composição de seu sanduíche será $3 \times 175 = 525$ possibilidades.

44 (Vunesp-SP) Considere todos os números formados por 6 algarismos distintos obtidos permutando-se, de todas as formas possíveis, os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

- a) Determine quantos números é possível formar (no total) e quantos números se iniciam com o algarismo 1. **720 e 120, respectivamente.**
- b) Escrevendo-se esses números em ordem crescente, determine qual posição ocupa o número 512 346 e que número ocupa a 242ª posição. **481ª e 312465**

Resolução:

a) Como serão formados números com 6 algarismos distintos, dispostos de 6 algarismos diferentes, o total possível de números será $P_6 = 6! = 720$. Iniciando com o algarismo 1, teremos a sexta parte dos algarismos formados, ou seja, 120 dos números formados começam com o algarismo 1.

b) Colocando em ordem crescente os números formados, antes de aparecerem os que começam com 5, teremos os que começam com 1, 2, 3 ou 4, que são: $4 \cdot P_5 = 4 \cdot 120 = 480$ números. O menor número começado com 5 é 512346, que será o 481º número.

Começados com 1 e 2, temos 240 números. O segundo número começado com 3 será 312465, que será o 242º número a ser formado.

45 (Fatec-SP) Com uma letra A , uma letra C , uma letra E , uma letra F e uma letra T , é possível formar $5! = 120$ “palavras” distintas (anagramas, com ou sem sentido).

Colocando-se essas “palavras” em ordem alfabética, a posição ocupada pela palavra FATEC será a:

- a) 77^a c) 80^a e) 96^a
b) 78^a d) 88^a

Resolução:

Iniciando com A , C e E , existem $3 \cdot P_4 = 3 \cdot 24 = 72$ anagramas.

Começadas com F , temos:

FACET, FACTE, FAECT, FAETC, FATCE e FATEC, que serão, respectivamente, as 73^a , 74^a , 75^a , 76^a , 77^a e 78^a palavras.

FATEC será, portanto, o 78^o anagrama.

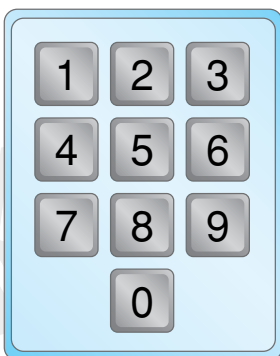
46 (MACK-SP) Um professor deve ministrar 20 aulas em 3 dias consecutivos, tendo, para cada um dos dias, as opções de ministrar 4, 6 ou 8 aulas. O número de diferentes distribuições possíveis dessas 20 aulas, nos 3 dias, é:

- a) 7 c) 4 e) 8
b) 6 d) 10

Resolução:

A distribuição das aulas nos três dias pode ser feita do seguinte modo: (4, 8, 8), (6, 6, 8), (6, 8, 6), (8, 4, 8), (8, 8, 4) e (8, 6, 6), ou seja, as aulas podem ser distribuídas de 6 maneiras diferentes.

47 (IME-RJ) O sistema de segurança de uma casa utiliza um teclado numérico, conforme ilustrado na figura. Um ladrão observa de longe e percebe que:



Teclado numérico

▪ a senha utilizada possui 4 dígitos;

▪ o primeiro e o último dígitos encontram-se numa mesma linha;

▪ o segundo e o terceiro dígitos encontram-se na linha imediatamente superior.

Calcule o número de senhas que deverão ser experimentadas pelo ladrão para que com certeza ele consiga entrar na casa. **171**

Resolução:

Se o primeiro e o último dígitos encontram-se na mesma linha, concluímos que só são utilizadas duas linhas consecutivas. Desse modo, temos:

a) as linhas são a 1^a e a 2^a , ou a 2^a e a 3^a : há $2 \cdot 3^4 = 162$ senhas possíveis.

b) as linhas são a 3^a e a 4^a : há 9 senhas possíveis.

O ladrão deverá experimentar até 171 ($162 + 9$) senhas para entrar na casa.

48 (UFSM-RS) Analise as afirmativas a seguir:

- I. O número de comissões de três pessoas que se pode formar num grupo de cinco pessoas é 60.
- II. Com os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5, podem-se formar 125 números de três algarismos.
- III. A quantidade de sete bombons iguais pode ser repartida de seis maneiras diferentes, em duas caixas idênticas, sem que nenhuma caixa fique vazia.

Está(ão) correta(s):

- a) apenas I
- b) apenas II
- c) apenas I e III
- d) apenas II e III
- e) I, II e III

Resolução:

I. (Falsa)

$$C_{5,3} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} = \frac{20}{2} = 10$$

II. (Verdadeira)

$$\frac{5}{(1^{\circ})} \cdot \frac{5}{(2^{\circ})} \cdot \frac{5}{(3^{\circ})} = 125 \text{ números de 3 algarismos.}$$

III. (Falsa)

Sete bombons iguais em duas caixas idênticas e nenhuma vazia: 1 e 6, 2 e 5 ou 3 e 4. Somente três maneiras diferentes.

49 (UnB-DF) Com dois goleiros que só jogam nessa posição e sete jogadores que não jogam no gol, calcule o número de times de futebol de salão que podem ser formados. **70**

Resolução:

Para o gol: 2 possibilidades.

$$\text{Para a linha: } C_{7,4} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = 35 \text{ possibilidades.}$$

$$\text{Total de possibilidades: } 2 \cdot 35 = 70$$

50 (ITA-SP) Considere os números de dois a seis algarismos distintos formados utilizando-se apenas 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Quantos desses números são ímpares e começam com um dígito par?

- a) 375
- b) 465
- c) 545
- d) 585
- e) 625

Resolução:

Considerando que o número comece com um algarismo par e termine com um ímpar, teremos:

$$\underline{P} \quad \underline{I} \quad \rightarrow 3 \cdot 3 = 9$$

$$\underline{P} \quad \underline{\quad} \quad \underline{I} \quad \rightarrow 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$$

$$\underline{P} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{I} \quad \rightarrow 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 108$$

$$\underline{P} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{I} \quad \rightarrow 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 216$$

$$\underline{P} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{I} \quad \rightarrow 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 216$$

$$\text{Total: } 9 + 36 + 108 + 216 + 216 = 585 \text{ números.}$$

51 (UEL-PR) Numa competição internacional, um país obteve, no total, dez medalhas dentre as de ouro, prata e bronze. Sabendo-se que esse país recebeu pelo menos uma medalha de ouro, uma de prata e uma de bronze, quantas são as possibilidades de composição do quadro de medalhas desse país?

- a) 10
b) 30
c) 36
d) 120
e) 132

Resolução:

Considerando que o país recebeu uma medalha de ouro, uma de prata e uma de bronze, o quadro de medalhas deve conter, ainda, mais sete medalhas.

Se nenhuma medalha for de ouro, para prata e bronze haverá, respectivamente, as seguintes possibilidades: 0 e 7, 1 e 6, 2 e 5, 3 e 4, 4 e 3, 5 e 2, 6 e 1 ou 7 e 0 (8 possibilidades).

Se uma medalha for de ouro, para prata e bronze haverá, respectivamente: 0 e 6, 1 e 5, 2 e 4, 3 e 3, 4 e 2, 5 e 1 ou 6 e 0 (7 possibilidades).

Aumentando uma a uma a quantidade de medalhas de ouro, o número de possibilidades diminui um a um; logo, o total de possibilidades será: $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$ possibilidades de confecção do quadro de medalhas.

p. 64

52 (UERN) A soma S de números binomiais $S = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$ é tal que:

- a) $S = 63$
b) $S = 64$
c) $S = 58$
d) $S = 60$
e) $S = 61$

Resolução:

$$S = 2^6 - \binom{6}{6} \rightarrow S = 64 - 1 = 63$$

53 Resolva a equação $\binom{8}{6} + \binom{8}{7} = \binom{9}{x+3}$. $\{-1, 4\}$

Resolução:

$$\binom{8}{6} + \binom{8}{7} = \binom{9}{7} \quad \binom{9}{7} = \binom{9}{x+3}$$

$$7 = x + 3 \quad \text{ou} \quad 7 + x + 3 = 9$$

$$x = 4$$

$$x = -1$$

$$S = \{-1, 4\}$$

54 (Unifor-CE) A soma das soluções da equação $\binom{15}{x-3} = \binom{15}{2x-9}$ é um número:

- a) menor que 10
b) múltiplo de 3
c) quadrado perfeito
d) cubo perfeito
e) par

Resolução:

$$\binom{15}{x-3} = \binom{15}{2x-9}$$

1º caso: binomiais iguais

$$x_1 - 3 = 2x_1 - 9 \rightarrow x_1 = 6$$

2º caso: binomiais complementares

$$x_2 - 3 = 15 - (2x_2 - 9) \rightarrow x_2 - 3 = 15 - 2x_2 + 9 \rightarrow x_2 = 9$$

Logo, $x_1 + x_2 = 6 + 9 = 15$, que é múltiplo de 3.

55 Calcule n , sabendo que: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2048$ 11

Resolução:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2048$$

$$2^n = 2048 \rightarrow 2^n = 2^{11} \rightarrow n = 11$$

56 (PUC-PR) O valor da expressão $103^4 - 4 \cdot 103^3 \cdot 3 + 6 \cdot 103^2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 103 \cdot 3^3 + 3^4$ é igual a:

- a) 10^{14}
b) 10^{12}
c) 10^{10}
d) 10^8
e) 10^6

Resolução:

$$103^4 - 4 \cdot 103^3 \cdot 3 + 6 \cdot 103^2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 103 \cdot 3^3 + 3^4 = (103 - 3)^4 = 100^4 = (10^2)^4 = 10^8$$

57 (UFAL) Desenvolvendo-se o binômio $\left(\frac{x}{2} + 4y\right)^{10}$ em ordem crescente das potências de x , qual é o coeficiente do termo médio? 8064

Resolução:

O termo médio é o T_6 :

$$T_6 = \binom{10}{5} \left(\frac{x}{2}\right)^{10-5} (4y)^5 = \frac{10!}{5!5!} \frac{x^5}{2^5} 4^5 y^5$$

$$T_6 = 8064x^5y^5$$

O coeficiente é 8064.

58 Determine o termo independente de x no desenvolvimento de $(\sqrt{x} + \frac{1}{x})^9$. 84

Resolução:

$$T_{p+1} = \binom{9}{p} (\sqrt{x})^{9-p} \left(\frac{1}{x}\right)^p$$

$$(\sqrt{x})^{9-p} \cdot \frac{1}{x^p} = x^0$$

$$x^{\frac{9-p}{2}} \cdot x^{-p} = x^0$$

$$\frac{9-p}{2} - p = 0 \rightarrow p = 3$$

O termo independente de x é o 4º termo.

$$T_4 = \binom{9}{3} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 84$$

$$T_4 = 84$$

59 (UFOP-MG) No desenvolvimento de $(x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^6$, calcule a ordem e o coeficiente do termo em x^2 .

4º termo; 20

Resolução:

$$T_{p+1} = \binom{6}{p} x^{6-p} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^p$$

$$x^{6-p} x^{-\frac{p}{3}} = x^2 \rightarrow 6 - p - \frac{p}{3} = 2 \rightarrow p = 3 \therefore 4^\circ \text{ termo}$$

$$T_4 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$$

60 (PUC-RS) Se o terceiro termo no desenvolvimento de $(a + b)^n$ é $21 \cdot a^5 \cdot b^2$, então o sexto termo é:

a) $35 \cdot a^4 \cdot b^3$

c) $21 \cdot a^2 \cdot b^5$

e) $7 \cdot a^2 \cdot b^5$

b) $21 \cdot a^3 \cdot b^4$

d) $7 \cdot a \cdot b^6$

Resolução:

$$(a + b)^n$$

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot b^p$$

$$T_3 = \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 = 21 \cdot a^5 \cdot b^2$$

$$n - 2 = 5 \rightarrow n = 7$$

$$\text{Logo, } T_{p+1} = \binom{7}{p} a^{7-p} \cdot b^p$$

$$\text{Fazendo } p = 5, \text{ temos: } T_6 = \binom{7}{5} a^{7-5} \cdot b^5 \rightarrow T_6 = 21 \cdot a^2 \cdot b^5$$

61 (EEM-SP) Verifique se, no desenvolvimento do binômio $\left(2x^2 - \frac{\sqrt{2}}{4x}\right)^{10}$, haverá, após as simplificações, um termo em x^5 . Em caso positivo, determine seu coeficiente. **sim, $\frac{-63\sqrt{2}}{2}$**

Resolução:

$$T_{p+1} = \binom{10}{p} (2x^2)^{10-p} (-1)^p \left(\frac{\sqrt{2}}{4x}\right)^p$$

$$x^{20-2p} \cdot x^{-p} = x^5 \rightarrow p = 5$$

Sim, T_6 é o termo em x^5 .

$$T_6 = \binom{10}{5} 2^5 \cdot (-1)^5 \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^5 x^5 \rightarrow T_6 = \frac{10!}{5!5!} \cdot 2^5 \cdot (-1) \frac{2^2 \sqrt{2}}{4^5} x^5$$

$$T_6 = -\frac{63\sqrt{2}}{2} x^5$$

O seu coeficiente é $-\frac{63\sqrt{2}}{2}$.

62 (UFCE) No desenvolvimento de $\left(ax - \frac{1}{2x}\right)^4$, $x \neq 0$, o termo independente de x é $\frac{27}{2}$. Calcule o valor de a^2 . **9**

Resolução:

$$T_{p+1} = \binom{4}{p} (ax)^{4-p} (-1)^p \left(\frac{1}{2x}\right)^p$$

$$x^{4-p} \cdot x^{-p} = x^0 \rightarrow p = 2$$

$$T_3 = \binom{4}{2} a^2 (-1)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^0$$

$$\frac{6a^2}{4} = \frac{27}{2} \rightarrow a^2 = 9$$

63 (UERJ) Na potência $\left(x + \frac{1}{x^5}\right)^n$, n é um número natural menor do que 100. Determine o maior valor de n , de modo que o desenvolvimento dessa potência tenha um termo independente de x . **96**

Resolução:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} (x^{-5})^p x^{n-p}, \text{ com } n < 100$$

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-6p}$$

Termo independente de x é o que contém x^0 . Logo, $n - 6p = 0 \rightarrow n = 6p$

$$n = 6p < 100, \text{ com } p = 0, 1, 2, \dots, 100$$

$$p < \frac{100}{6} = 16,666\dots$$

O maior valor de n é obtido para $p = 16$.

$$\text{Então, } n = 6 \cdot 16 \rightarrow n = 96.$$

64 (UFBA) No desenvolvimento de $(2x^2 + y)^9$, c é o coeficiente do termo no qual os expoentes de x e y são iguais. Calcule $\frac{c}{8}$. 84

Resolução:

$$T_{p+1} = \binom{9}{p} (2x^2)^{9-p} \cdot y^p$$

$$x^{2(9-p)} = y^p \rightarrow 18 - 2p = p \rightarrow p = 6$$

$$T_7 = \binom{9}{6} 2^3 x^6 y^6$$

$$c = \frac{9!}{3!6!} \cdot 2^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} \cdot 8 = 672 \rightarrow \frac{c}{8} = \frac{672}{8} = 84$$

65 (ITA-SP) Sabendo que é de 1024 a soma dos coeficientes do polinômio em x e y , obtido pelo desenvolvimento do binômio $(x + y)^m$, temos que o número de arranjos sem repetição de m elementos, tomados 2 a 2, é:

a) 80

c) 70

e) 60

(b) 90

d) 100

Resolução:

A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x + y)^m$ é dada por $(1 + 1)^m = 2^m$.

Logo, $2^m = 1024$

$$2^m = 2^{10} \rightarrow m = 10$$

Então, $A_{m,2} = A_{10,2} = 10 \cdot 9 = 90$

66 (Efoa-MG) Se $A(x) = x + \frac{1}{x}$ e $B(x) = x - \frac{1}{x}$, o termo independente de x no polinômio $P(x) = [A(x)]^6[B(x)]^6$ é igual a:

a) -60

c) 30

e) 60

(b) -20

d) 40

Resolução:

$$[A(x)]^6 \cdot [B(x)]^6 = [A(x) \cdot B(x)]^6$$

$$P(x) = \left[\left(x + \frac{1}{x} \right) \cdot \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]^6$$

$$P(x) = \left[x^2 - \frac{1}{x^2} \right]^6$$

O termo geral do desenvolvimento de $P(x)$ é dado por:

$$T_{p+1} = (-1)^p \cdot \binom{6}{p} \cdot \left(\frac{1}{x^2} \right)^p \cdot (x^2)^{6-p}$$

$$T_{p+1} = (-1)^p \binom{6}{p} x^{12-4p}$$

Nesse caso, o termo independente de x ocorre para: $12 - 4p = 0 \rightarrow p = 3$

$$\text{Logo: } T_4 = (-1)^3 \cdot \binom{6}{3} \rightarrow T_4 = (-1) \cdot \frac{6!}{3!3!} \therefore T_4 = -20$$