



**Exame Discursivo – 2006**

**As questões desta prova apresentam situações relacionadas ao ambiente típico de uma feira.**

1. (UERJ)

**A feira de Caruaru**  
A feira de Caruaru  
Faz gosto da gente ver  
De tudo que há no mundo  
Nela tem pra vender

<http://luiz-gonzaga.letras.terra.com.br>

A cidade a que se refere Luiz Gonzaga em sua canção está indicada no mapa abaixo como a origem de um sistema de eixos ortogonais xOy.



Considere que a região de influência da feira de Caruaru seja representada, nesse sistema de eixos, pela inequação  $x^2 + y^2 \leq 2,25$ , com  $x$  e  $y$  medidos em centímetros. Em relação à região de influência da feira:

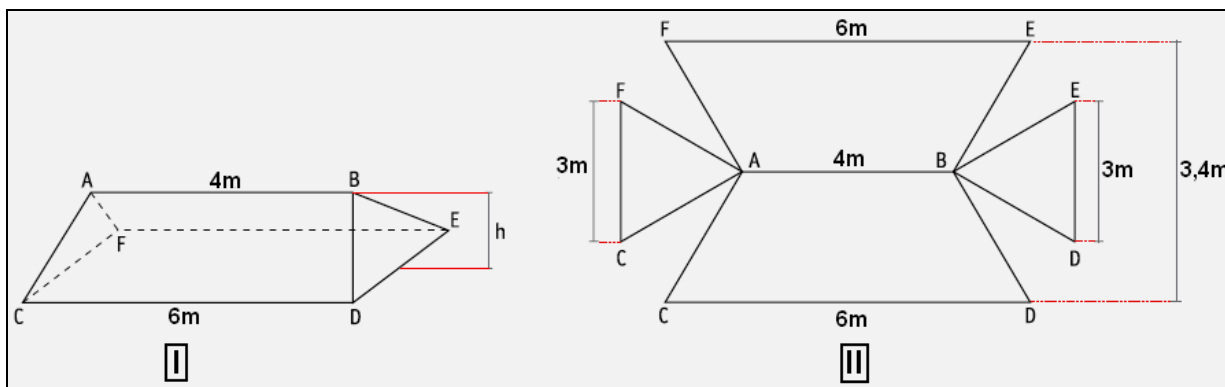
- Determine sua área, em  $\text{km}^2$ , supondo que a escala do mapa seja de 1:10000000;
- Demonstre que uma cidade situada nas coordenadas  $\left(\frac{11}{10}, \frac{11}{10}\right)$  do sistema de eixos considerado não está nessa região.

2. (UERJ) O preço dos produtos agrícolas oscila com a safra de cada um: mais baixo no período da colheita, mais alto na entressafra. Suponha que o preço aproximado  $P$ , em reais, do quilograma de tomates seja dado pela função  $P(t) = 0,8 \times \text{sen} \left[ \frac{2\pi}{360}(t - 101) \right] + 2,7$ , na qual  $t$  é o número de dias contados de 1º de janeiro até 31 de dezembro de um determinado ano.

Para esse período, calcule:

- O maior e o menor preço do quilograma de tomates;
- Os valores  $t$  para os quais o preço  $P$  seja igual a R\$3,10.

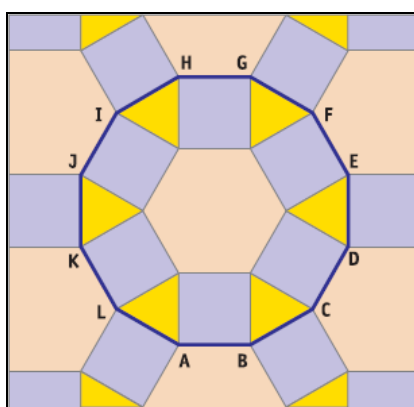
3. (UERJ) Observe as figuras a seguir. A figura I mostra a forma do toldo de uma barraca, e a figura II, sua respectiva planificação, composta por dois trapézios isósceles congruentes e dois triângulos.



Calcule:

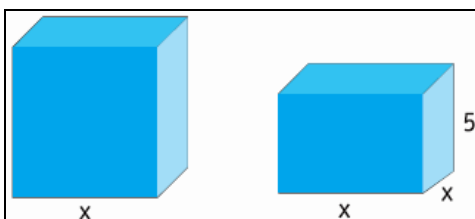
- A distância  $h$  da aresta  $\overline{AB}$  ao plano CDEF;
- O volume do sólido de vértices A, B, C, D, E e F, mostrado na figura I, em função de  $h$ .

4. (UERJ) No toldo da barraca de seu Antônio, decorado com polígonos coloridos, destaca-se um dodecágono cujos vértices são obtidos a partir de quadrados construídos em torno de um hexágono regular, conforme mostra o desenho abaixo.



- Demonstre que o dodecágono ABCDEFGHIJKL é um polígono regular.
- tomando o quadrado de lado  $\overline{AB}$  como unidade de área, calcule a área desse dodecágono.

5. (UERJ) As figuras abaixo representam as formas e as dimensões, em decímetros, de duas embalagens: um cubo com aresta  $x$  e um paralelepípedo retângulo com arestas  $x$ ,  $x$  e 5.



A diferença entre as capacidades de armazenamento dessas embalagens é expressa por  $x^3 - 5x^2 = 36$ , em  $\text{dm}^3$ . Considerando essa equação:

- Demonstre que 6 é uma de suas raízes;
- Calcule as suas raízes complexas.

6. (UERJ) Três barracas de frutas,  $B_1$ ,  $B_2$ , e  $B_3$ , são propriedade de uma mesma empresa. Suas vendas são controladas por meio de uma matriz, na qual cada elemento  $b_{ij}$  representa a soma dos valores arrecadados

pelos barracas  $B_i$  e  $B_j$ , em milhares de reais, ao final de um determinado dia de feira:  $B = \begin{bmatrix} x & 1,8 & 3,0 \\ a & y & 2,0 \\ d & c & z \end{bmatrix}$ .

Calcule, para esse dia, o valor, em reais:

- Arrecadado a mais pela barraca  $B_3$  em relação à barraca  $B_2$ ;
- Arrecadado em conjunto pelas três barracas.

7. (UERJ) A tabela a seguir apresenta os preços unitários de três tipos de frutas e os números de unidades vendidas de cada uma delas em um dia de feira.

FRUTAS	PREÇO POR UNIDADE (EM REAIS)	NÚMERO DE UNIDADES VENDIDAS
mamão	1	x
abacaxi	2	y
melão	3	z

A arrecadação obtida com a venda desses produtos pode ser calculada pelo produto escalar de  $\vec{p} = (1,2,3)$  por  $\vec{u} = (x,y,z)$ . Determine:

- O valor arrecadado, em reais, com a venda de dez mamões, quinze abacaxis e vinte melões;
- o cosseno do ângulo formado pelos vetores  $\vec{p}$  e  $\vec{u}$ , sabendo que  $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$ ,  $\underline{z}$  são respectivamente proporcionais a 3, 2, 1.

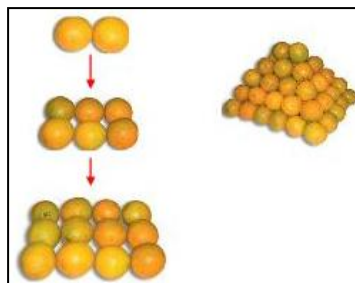
8. (UERJ) Durante um período de 8 horas, a quantidade de frutas na barraca de um feirante se reduz a cada hora, do seguinte modo:

- Nas  $\underline{t}$  primeiras horas diminuem sempre 20% em relação ao número de frutas da hora anterior.
- Nas  $(8 - \underline{t})$  horas restantes, diminui 10% em relação ao número de frutas da hora anterior.

Calcule:

- O percentual do número de frutas que resta ao final das duas primeiras horas de venda, supondo  $\underline{t} = 2$ .
- O valor de  $\underline{t}$ , admitindo que, ao final do período de 8 horas, há na barraca, 32% das frutas que havia inicialmente. (Considere  $\log 2 = 0,30$  e  $\log 3 = 0,48$ ).

9. (UERJ) Em uma barraca de frutas, as laranjas são arrumadas em camadas retangulares, obedecendo à seguinte disposição: uma camada de duas laranjas encaixa-se sobre uma camada de seis; essa camada de seis encaixa-se sobre outra de doze; e assim por diante, conforme a ilustração a seguir.



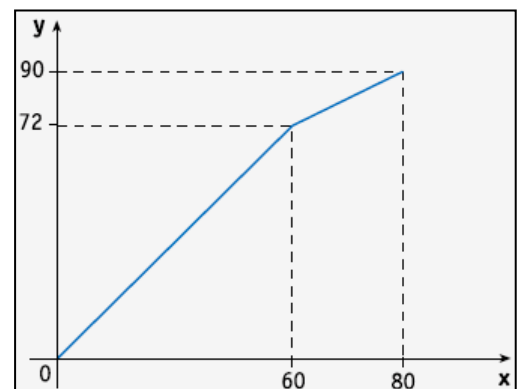
Sabe-se que a soma dos elementos de uma coluna do triângulo de Pascal pode ser calculada pela fórmula  $C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$ , na qual  $\underline{n}$  e  $\underline{p}$  são números naturais,  $\underline{n} \geq \underline{p}$  e  $C_n^p$  corresponde ao número de combinações simples de  $\underline{n}$  elementos tomados  $\underline{p}$  a  $\underline{p}$ . Com base nessas informações, calcule:

- a soma  $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_{18}^2$ ;
- o número total de laranjas que compõem quinze camadas.

10. (UERJ) No gráfico a seguir,  $\underline{x}$  representa a quantidade de batatas, em quilogramas, vendidas na barraca de seu Custódio, em um dia de feira, e  $\underline{y}$  representa o valor, em reais, arrecadado com essa venda. A partir das 12 horas, o movimento diminui e o preço do quilograma de batatas também diminui.

- Calcule a redução percentual do preço do quilograma das batatas a partir das 12 horas.

- Se o preço não diminuísse, teria sido arrecadado um valor  $\underline{V}$  na venda de 80 kg. Determine o percentual de  $\underline{V}$  que corresponde à perda causada pela redução do preço.





Exame Discursivo – 2006 - **GABARITO**

As questões desta prova apresentam situações relacionadas ao ambiente típico de uma feira.

1. (UERJ)

**A feira de Caruaru**  
A feira de Caruaru  
Faz gosto da gente ver  
De tudo que há no mundo  
Nela tem pra vender

<http://luiz-gonzaga.lettras.terra.com.br>

A cidade a que se refere Luiz Gonzaga em sua canção está indicada no mapa abaixo como a origem de um sistema de eixos ortogonais xOy.



(Adaptado de Almanaque Abril, 2000.)

Considere que a região de influência da feira de Caruaru seja representada, nesse sistema de eixos, pela inequação  $x^2 + y^2 \leq 2,25$ , com  $x$  e  $y$  medidos em centímetros. Em relação à região de influência da feira:

a) Determine sua área, em  $\text{km}^2$ , supondo que a escala do mapa seja de 1:10000000;

**Solução. A região de influência representa uma circunferência e seu interior centrada na origem e raio 1,5cm. Calculando a área no mapa e em  $\text{km}^2$ , temos:**

- i) Raio(mapa) : 1,5 cm
- ii) Raio(km) :  $\frac{1,5}{1} = \frac{R}{10000000} \Rightarrow R = 15000000\text{cm} = 150\text{km}$ .
- iii) Área :  $\pi(150)^2 = 22500\pi \text{ km}^2$

b) Demonstre que uma cidade situada nas coordenadas  $\left(\frac{11}{10}, \frac{11}{10}\right)$  do sistema de eixos considerado não está nessa região.

**Solução. A cidade está indicada no mapa pela letra C. Esta cidade estará na fronteira ou interior da circunferência se a distância entre o ponto C e a origem for menor ou igual a 1,5. Calculamos, temos:**

$$d(C,O) = \sqrt{\left(\frac{11}{10} - 0\right)^2 + \left(\frac{11}{10} - 0\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^2} = (1,1) \cdot \sqrt{2} \cong (1,1) \cdot (1,4) = 1,54 > 1,5. \text{ Logo, C está fora.}$$

2. (UERJ) O preço dos produtos agrícolas oscila com a safra de cada um: mais baixo no período da colheita, mais alto na entressafra. Suponha que o preço aproximado  $P$ , em reais, do quilograma de tomates seja dado pela função  $P(t) = 0,8 \times \text{sen} \left[ \frac{2\pi}{360} (t - 101) \right] + 2,7$ , na qual  $t$  é o número de dias contados de 1º de janeiro até 31 de dezembro de um determinado ano.

Para esse período, calcule:

a) O maior e o menor preço do quilograma de tomates;

**Solução. O maior preço será obtido quando o valor do seno for máximo. Isto é, igual a (1).**

$$\begin{cases} P(t) = 0,8 \cdot \text{sen} \left[ \frac{2\pi}{360} \cdot (t - 101) \right] + 2,7 \\ \text{sen} \left[ \frac{2\pi}{360} \cdot (t - 101) \right] = 1 \end{cases} \Rightarrow P(t) = 0,8 \cdot (1) + 2,7 = \text{R\$}3,50$$

**O menor preço será obtido quando o valor do seno for mínimo. Isto é, igual a (-1).**

$$\begin{cases} P(t) = 0,8 \cdot \text{sen} \left[ \frac{2\pi}{360} \cdot (t - 101) \right] + 2,7 \\ \text{sen} \left[ \frac{2\pi}{360} \cdot (t - 101) \right] = -1 \end{cases} \Rightarrow P(t) = 0,8 \cdot (-1) + 2,7 = -0,8 + 2,7 = \text{R\$}1,90$$

b) Os valores  $t$  para os quais o preço  $P$  seja igual a R\$3,10.

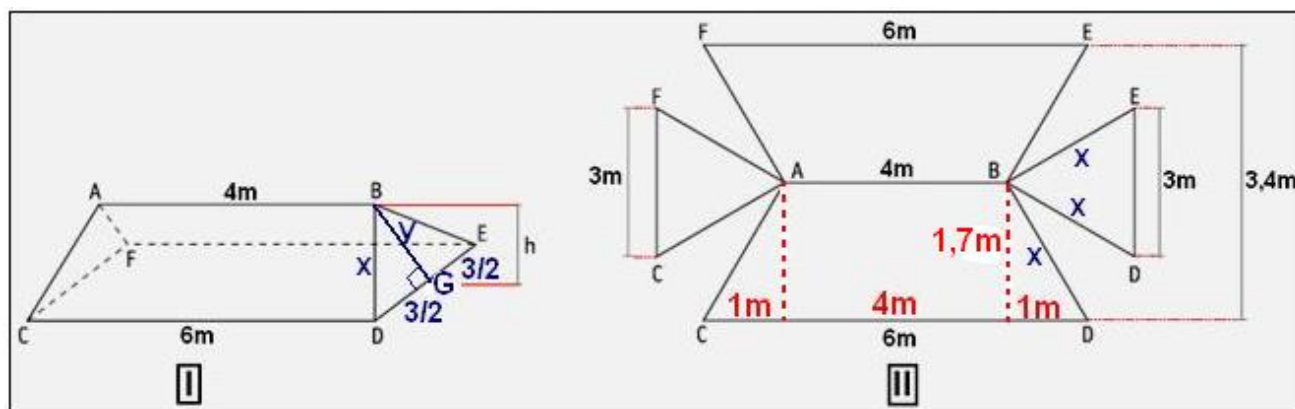
**Solução. Substituindo na fórmula o valor indicado, temos:**

$$\begin{cases} P(t) = 0,8 \cdot \text{sen} \left[ \frac{2\pi}{360} \cdot (t - 101) \right] + 2,7 \\ P = 3,1 \end{cases} \Rightarrow 3,1 = 0,8 \cdot \text{sen} \left[ \frac{2\pi}{360} \cdot (t - 101) \right] + 2,7 \Rightarrow \text{sen} \left[ \frac{2\pi}{360} \cdot (t - 101) \right] = \frac{3,1 - 2,7}{0,8} \Rightarrow$$

$$\text{sen} \left[ \frac{2\pi}{360} \cdot (t - 101) \right] = \frac{0,4}{0,8} \Rightarrow \text{sen} \left[ \frac{2\pi}{360} \cdot (t - 101) \right] = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{360} \cdot (t - 101) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t - 101 = \frac{360\pi}{12\pi} \Rightarrow t = 101 + 30 = 131 \\ \frac{2\pi}{360} \cdot (t - 101) = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t - 101 = \frac{1800\pi}{12\pi} \Rightarrow t = 101 + 150 = 251 \end{cases}$$

**O preço será de R\$3,10 para  $t = 131$  dias ou  $t = 251$  dias.**

3. (UERJ) Observe as figuras a seguir. A figura I mostra a forma do toldo de uma barraca, e a figura II, sua respectiva planificação, composta por dois trapézios isósceles congruentes e dois triângulos.



Calcule:

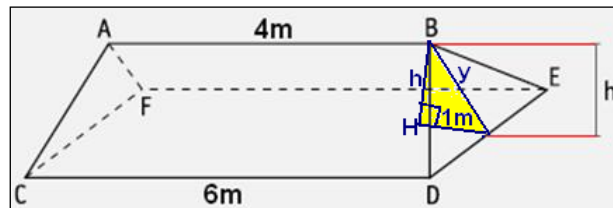
a) A distância  $h$  da aresta  $\overline{AB}$  ao plano CDEF;

**Solução. Inicialmente temos que a medida dos lados,  $x$ , do triângulo é congruente à medida do lado não paralelo do trapézio. Logo, o triângulo também é isósceles. Seja  $y$  a altura do triângulo. Ela divide a base do triângulo em dois segmentos de  $3/2$  m. Calculando  $x$  e  $y$  de acordo com as figuras I e II, temos:**

$$\begin{aligned} \text{i) Figura II: } x^2 &= (1,7)^2 + 1^2 \Rightarrow x = \sqrt{2,89 + 1} = \sqrt{3,89} \text{ m} \\ \text{ii) Figura I: } x^2 &= (1,5)^2 + y^2 \Rightarrow 3,89 = 2,25 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{3,89 - 2,25} = \sqrt{1,64} \text{ m} \end{aligned}$$

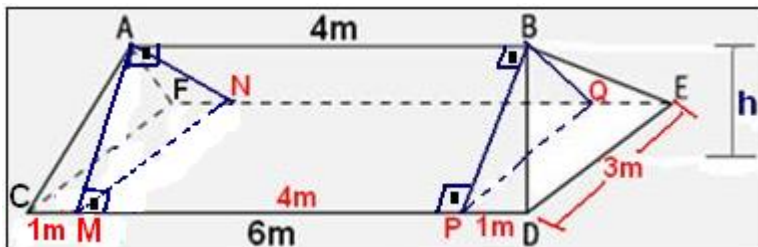
A distância  $h$  será calculada observando a figura mostrada. Substituindo os valores, temos:

$$\begin{cases} y^2 = h^2 + (1)^2 \\ y = \sqrt{1,64} \end{cases} \Rightarrow 1,64 = h^2 + 1 \Rightarrow h^2 = 1,64 - 1 \Rightarrow h^2 = 0,64 \Rightarrow h = \sqrt{0,64} = 0,8 \text{ m}$$



b) O volume do sólido de vértices A, B, C, D, E e F, mostrado na figura I, em função de  $h$ .

**Solução.** O sólido pode ser decomposto em duas pirâmides equivalentes e um prisma triangular de acordo com a figura.



i) Pirâmide CMNFA:  $\text{Volume} = \frac{A(\text{base}) \times h}{3} = \frac{(1) \times (3) \times h}{3} = h$ .

ii) Prisma triangular de bases AMN e BPQ e altura AB:  $\text{Volume} = A(\text{base}) \times h = \frac{(3) \times (h)}{2} \times (4) = 6h$ .

iii) Pirâmide PDEQB:  $\text{Volume} = \frac{A(\text{base}) \times h}{3} = \frac{(1) \times (3) \times h}{3} = h$ .

O volume do sólido, em função de  $h$ , é:  $h + h + 6h = 8h$ .

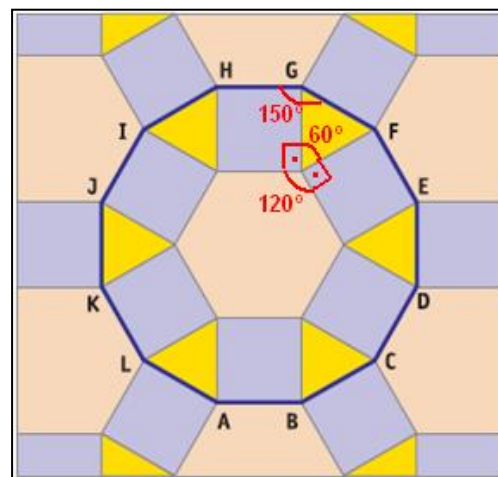
4. (UERJ) No toldo da barraca de seu Antônio, decorado com polígonos coloridos, destaca-se um dodecágono cujos vértices são obtidos a partir de quadrados construídos em torno de um hexágono regular, conforme mostra o desenho abaixo.

a) Demonstre que o dodecágono ABCDEFGHIJKL é um polígono regular.

**Solução.** O hexágono regular possui seus ângulos internos iguais a  $120^\circ$ . Como o quadrado possui ângulos de  $90^\circ$ , o triângulo possui ângulo de  $60^\circ$  e sendo isósceles, pois também são lados do quadrado, os triângulos são equiláteros. Como todos os quadrados possuem a mesma medida, todos os ângulos internos desse dodecaedro medem  $90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ . Logo, é regular.

b) tomando o quadrado de lado  $\overline{AB}$  como unidade de área, calcule a área desse dodecágono.

**Solução.** O hexágono interno possui lado de mesma medida do lado do quadrado e do triângulo equilátero. Há no total, 6 triângulos equiláteros, 1 hexágono e 6 quadrados. Temos:

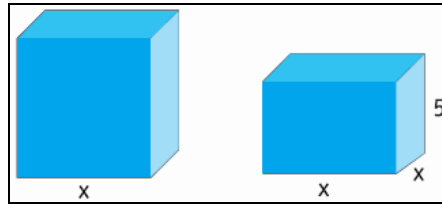


$$\begin{cases} \text{Área(Quadrado)} = L^2 \\ \text{Área(Triângulo)} = \frac{L^2 \sqrt{3}}{4} \end{cases} \Rightarrow \text{Área(Dodecágono)} = 6Q + 6T + 1H = 6L^2 + 6 \cdot \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \frac{L^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Área(Hexágono)} = 6 \cdot \frac{L^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \text{Área(Dodecágono)} = \left(6 + \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) L^2 = (6 + 3 \cdot \sqrt{3}) L^2 = (6 + 3 \cdot \sqrt{3}) \text{ Unidades}$$

5. (UERJ) As figuras abaixo representam as formas e as dimensões, em decímetros, de duas embalagens: um cubo com aresta  $x$  e um paralelepípedo retângulo com arestas  $x$ ,  $x$  e  $5$ .



A diferença entre as capacidades de armazenamento dessas embalagens é expressa por  $x^3 - 5x^2 = 36$ , em  $\text{dm}^3$ . Considerando essa equação:

a) Demonstre que **6** é uma de suas raízes;

**Solução. Se 6 for raiz, substituindo  $x = 6$  no primeiro membro, encontra-se o resultado 36.**

**Verificação:  $(6)^3 - 5.(6)^2 = 216 - 5.(36) = 216 - 180 = 36$ . Logo,  $x = 6$  é raiz.**

b) Calcule as suas raízes complexas.

**Solução. A equação é  $x^3 - 5x^2 - 36 = 0$ . Aplicando o distributivo de Briot-Ruffini, temos:**

**O quociente é  $Q(x) = x^2 + x + 6$ . Encontrando as raízes, temos:**

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.(1).(6)}}{2.(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1 - i\sqrt{23}}{2} \\ x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{23}}{2} \end{cases}$$

<b>6</b>	<b>1</b>	<b>-5</b>	<b>0</b>	<b>-36</b>
	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>6</b>	<b>0</b>

6. (UERJ) Três barracas de frutas,  $B_1$ ,  $B_2$ , e  $B_3$ , são propriedade de uma mesma empresa. Suas vendas são controladas por meio de uma matriz, na qual cada elemento  $b_{ij}$  representa a soma dos valores arrecadados

pelas barracas  $B_i$  e  $B_j$ , em milhares de reais, ao final de um determinado dia de feira:  $B = \begin{bmatrix} x & 1,8 & 3,0 \\ a & y & 2,0 \\ d & c & z \end{bmatrix}$ .

Calcule, para esse dia, o valor, em reais:

a) Arrecadado a mais pela barraca  $B_3$  em relação à barraca  $B_2$ ;

**Solução. De acordo com as informações do problema, temos:**

**i)  $B_1 + B_2 = b_{12}$ ;  $B_1 + B_3 = b_{13}$ ;  $B_2 + B_3 = b_{23}$ ;**

**ii) Os valores das diagonais valem somas de valores de uma mesma barraca.**

**Como os valores pedidos referem-se a  $B_1$  e  $B_2$ , montamos o sistema.**

$$\begin{cases} B_1 + B_2 = 1800 \rightarrow \times(-1) \\ B_1 + B_3 = 3000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -B_1 - B_2 = -1800 \\ B_1 + B_3 = 3000 \end{cases} \Rightarrow B_3 - B_2 = 3000 - 1800 = 1200.$$

**A diferença mostra que  $B_3$  arrecadou 1200 reais a mais que a barraca  $B_2$ .**

b) Arrecadado em conjunto pelas três barracas.

**Solução. Encontrando os valores arrecadados temos:**

$$\begin{cases} B_3 - B_2 = 1200 \\ B_3 + B_2 = 2000 \end{cases} \Rightarrow 2.B_3 = 3200 \Rightarrow B_3 = \frac{3200}{2} = 1600 \Rightarrow B_1 + B_2 + B_3 = (1800) + (1600) = 3400.$$

**Foram arrecadados em conjunto R\$3400,00.**

7. (UERJ) A tabela a seguir apresenta os preços unitários de três tipos de frutas e os números de unidades vendidas de cada uma delas em um dia de feira.

Frutas	Preço por unidades (em reais)	Número de unidades vendidas
mamão	1	x
abacaxi	2	y
melão	3	z

A arrecadação obtida com a venda desses produtos pode ser calculada pelo produto escalar de  $\vec{p} = (1,2,3)$  por  $\vec{u} = (x,y,z)$ . Determine:

a) O valor arrecadado, em reais, com a venda de dez mamões, quinze abacaxis e vinte melões;

**Solução. O produto escalar é calculado pela soma dos produtos das respectivas coordenadas dos**

**vetores:**

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \Rightarrow \langle \vec{p}; \vec{u} \rangle = \langle (1,2,3); (10,15,20) \rangle = (1) \cdot (10) + (2) \cdot (15) + (3) \cdot (20) = 10 + 30 + 60 = 100 \\ z = 20 \end{cases}$$

Valor : R\$100,00

b) o cosseno do ângulo formado pelos vetores  $\vec{p}$  e  $\vec{u}$ , sabendo que  $x$ ,  $y$ ,  $z$  são respectivamente proporcionais a 3, 2, 1.

**Solução. Utilizando a fórmula do cosseno entre vetores, temos:**

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{p}; \vec{u} \rangle}{\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{u}\|} = \frac{\langle (1,2,3); (3k,2k,k) \rangle}{\left(\sqrt{(3k)^2 + (2k)^2 + (k)^2}\right) \left(\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2}\right)} = \frac{3k + 4k + 3k}{\left(\sqrt{9k^2 + 4k^2 + k^2}\right) \left(\sqrt{1+4+9}\right)}$$

$$\cos \theta = \frac{10k}{\left(\sqrt{14k^2}\right) \left(\sqrt{14}\right)} = \frac{10k}{14k} = \frac{5}{7}$$

8. (UERJ) Durante um período de 8 horas, a quantidade de frutas na barraca de um feirante se reduz a cada hora, do seguinte modo:

- Nas  $t$  primeiras horas diminuem sempre 20% em relação ao número de frutas da hora anterior.

- Nas  $(8 - t)$  horas restantes, diminui 10% em relação ao número de frutas da hora anterior.

Calcule:

a) O percentual do número de frutas que resta ao final das duas primeiras horas de venda, supondo  $t = 2$ .

$$\begin{aligned} t = 0 &\Rightarrow Q. \\ t = 1 &\Rightarrow Q - 0,2 \cdot Q = 0,8 \cdot Q \\ t = 2 &\Rightarrow 0,8Q - 0,2 \cdot (0,8Q) = 0,8Q \cdot (1 - 0,2) = Q \cdot 0,8^2 \\ f(t) &= Q \cdot 0,8^t, t \leq (8 - t) \end{aligned}$$

**Solução. Nas  $t$  horas iniciais, temos:**

**Nas  $(8 - t)$  horas restantes, temos:**  $f(t) = (0,9)^{8-t} \cdot (Q \cdot 0,8^t), t > (8 - t)$ .

**Utilizando a 1ª expressão de  $f(t)$ , temos:**  $f(2) = Q \cdot (0,8)^2 = Q \cdot (0,64)$ . Logo, restam 64%.

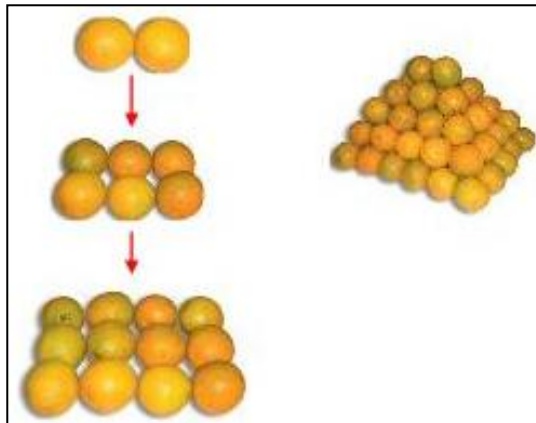
b) O valor de  $t$ , admitindo que, ao final do período de 8 horas, há na barraca, 32% das frutas que havia inicialmente. (Considere  $\log 2 = 0,30$  e  $\log 3 = 0,48$ ).

**Solução. Ao final do período, utilizamos a 2ª expressão para  $f(t)$ :**

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(t) = (0,9)^{8-t} \cdot (Q \cdot 0,8^t) \\ f(t) = 0,32 \cdot Q \end{cases} &\Rightarrow (0,9)^{8-t} \cdot (Q \cdot 0,8^t) = 0,32Q \Rightarrow (0,9)^{8-t} \cdot (0,8^t) = 0,32 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (0,9)^8 \cdot (0,9)^{-t} \cdot (0,8^t) = 0,32 \Rightarrow [(0,9^{-1})(0,8)]^t = \frac{0,32}{(0,9)^8} \Rightarrow \left[\frac{(0,8)}{(0,9)}\right]^t = \frac{0,32}{\left[\frac{(10)^{-1}}{9}\right]^8} \Rightarrow \left(\frac{8}{9}\right)^t = 0,32 \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^8 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \log_{\frac{8}{9}} \left[0,32 \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^8\right] = \frac{\log \left[0,32 \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^8\right]}{\log \frac{8}{9}} = \frac{\log \left(\frac{2^5}{100}\right) + \log \left(\frac{10}{9}\right)^8}{\log 2^3 - \log 3^2} = \frac{5 \log 2 - 2 \cdot \log 10 + 8(\log 10 - \log 3^2)}{3 \cdot \log 2 - 2 \log 3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \frac{5(0,3) - 2(1) + 8 \cdot (1) - 8 \cdot (2) \cdot \log 3}{3 \cdot (0,3) - 2 \cdot (0,48)} = \frac{1,5 - 2 + 8 - 16 \cdot (0,48)}{0,9 - 0,96} = \frac{7,5 - 7,68}{-0,06} = \frac{-0,18}{-0,06} \Rightarrow t = 3 \end{aligned}$$

**O período será de 3 horas.**

9. (UERJ) Em uma barraca de frutas, as laranjas são arrumadas em camadas retangulares, obedecendo à seguinte disposição: uma camada de duas laranjas encaixa-se sobre uma camada de seis; essa camada de seis encaixa-se sobre outra de doze; e assim por diante, conforme a ilustração a seguir.



Sabe-se que a soma dos elementos de uma coluna do triângulo de Pascal pode ser calculada pela fórmula  $C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$ , na qual  $n$  e  $p$  são números naturais,  $n \geq p$  e  $C_n^p$  corresponde ao número de combinações simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ . Com base nessas informações, calcule:

a) a soma  $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_{18}^2$ ;

**Solução. Utilizando os conceitos binomiais, temos:**

$$a) C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_{18}^2 = C_{19}^3 = \frac{19!}{3! \cdot 16!} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16!}{3! \cdot 16!} = (19) \cdot (17) \cdot (3) = 969.$$

b) o número total de laranjas que compõem quinze camadas.

**b) As camadas de laranjas podem ser representações de números binomiais em colunas. Observando as primeiras representações do triângulo de Pascal, temos que a 3ª coluna multiplicada por 2 fornece a quantidade indicada de laranjas por camadas:**

$$\left. \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ camada: } 2 = 2 \cdot C_2^2 \\ 2^{\text{a}} \text{ camada: } 6 = 2 \cdot C_3^2 \\ 3^{\text{a}} \text{ camada: } 12 = 2 \cdot C_4^2 \\ 4^{\text{a}} \text{ camada: } 20 = 2 \cdot C_5^2 \\ \dots \\ 15^{\text{a}} \text{ camada: } 2 \cdot C_{16}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Total: } 2 \cdot (C_2^2 + C_3^2 + \dots + C_{16}^2) = 2 \cdot C_{17}^3 = 2 \cdot \left( \frac{17!}{3! \cdot 14!} \right) \Rightarrow$$

$$\text{Total: } 2 \cdot \left( \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14!}{(2 \cdot 3) \cdot 14!} \right) = 17 \cdot 16 \cdot 5 = 1360$$

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

**b) Solução 2. Observe que (2, 6, 12, 20,...) é uma progressão aritmética de 2ª ordem, pois subtraindo uma vez o termo pelo antecessor, temos a progressão aritmética de razão 2: (4, 6, 8,...). Temos:**

$$b_{14} = 4 + (14 - 1) \cdot 2 = 4 + 26 = 30 \Rightarrow a_{15} = 2 + \frac{(4 + 30) \cdot 14}{2} = 2 + (34) \cdot (7) = 2 + 238 = 240$$

$$\text{Soma(PA - 2ª ordem): } a_1 \cdot n + \frac{b_1}{2} \cdot n \cdot (n - 1) + \frac{r}{6} \cdot n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ b_1 = 4 \\ r = 2 \\ n = 15 \end{array} \right. \Rightarrow (2) \cdot (15) + \frac{4}{2} \cdot (15) \cdot (14) + \frac{2}{6} \cdot (15) \cdot (14) \cdot (13) = 30 + (30) \cdot (14) + (5) \cdot (14) \cdot (13) \Rightarrow$$

$$\text{Soma(PA - 2ª ordem)} = 30 + 420 + 910 = 1360$$

10. (UERJ) No gráfico a seguir,  $x$  representa a quantidade de batatas, em quilogramas, vendidas na barraca de seu Custódio, em um dia de feira, e  $y$  representa o valor, em reais, arrecadado com essa venda. A partir das 12 horas, o movimento diminui e o preço do quilograma de batatas também diminui.

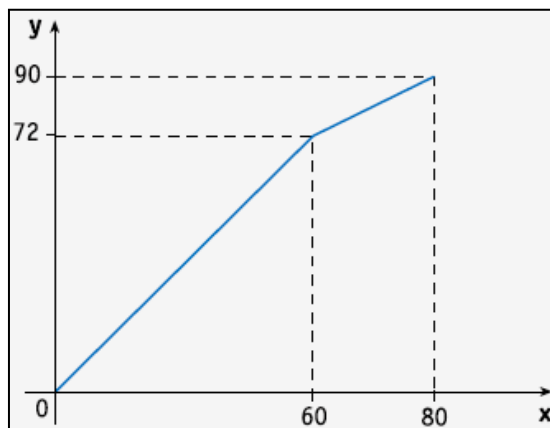
a) Calcule a redução percentual do preço do quilograma das batatas a partir das 12 horas.

**Solução.** De acordo com o gráfico, com a venda de 60kg de batatas são arrecadados R\$72,00. Logo, o quilograma da

batata, antes das 12 horas, custa:  $\text{Preço} = \frac{72}{60} = \text{R}\$1,20$ .

Após às 12 horas, temos:  $\text{Preço} = \frac{90 - 72}{80 - 60} = \frac{18}{20} = \text{R}\$0,90$ .

A variação percentual é:  $i = \frac{0,90 - 1,20}{1,20} = -\frac{0,30}{1,20} = -0,25$ .



Isto representa uma redução de 25%.

b) Se o preço não diminuísse, teria sido arrecadado um valor  $V$  na venda de 80 kg. Determine o percentual de  $V$  que corresponde à perda causada pela redução do preço.

**Solução.** Os pontos (60, 72) e (0, 0) estão sobre a mesma reta que representa uma função afim.

Encontrando a lei da função e calculando o valor arrecadado para 80kg, temos:

$$\begin{cases} 72 = a(60) + b \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1,2 \Rightarrow f(x) = 1,2 \cdot x$$

$$f(80) = 1,2 \cdot (80) = 96$$

Como foram arrecadados R\$90,00 o percentual de  $V$  será:

$$90 = 96 \cdot (1 - i) \Rightarrow 1 - i = \frac{90}{96} \Rightarrow 1 - i = 0,9375 \Rightarrow i = 1 - 0,9375 \Rightarrow i = 0,0625 \rightarrow 6,25\%$$



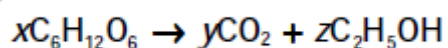
### Exame Discursivo – 2007

1. (UERJ) Os anos do calendário chinês, um dos mais antigos que a história registra, começam sempre em uma lua nova, entre 21 de janeiro e 20 de fevereiro do calendário gregoriano. Eles recebem nomes de animais, que se repetem em ciclos de doze anos. A tabela abaixo apresenta o ciclo mais recente desse calendário.

ANO DO CALENDÁRIO CHINÊS	
início no calendário gregoriano	nome
31 - janeiro - 1995	porco
19 - fevereiro - 1996	rato
08 - fevereiro - 1997	boi
28 - janeiro - 1998	tigre
16 - fevereiro - 1999	coelho
05 - fevereiro - 2000	dragão
24 - janeiro - 2001	serpente
12 - fevereiro - 2002	cavalo
01 - fevereiro - 2003	cabra
22 - fevereiro - 2004	macaco
09 - fevereiro - 2005	galo
29 - janeiro - 2006	cão

Admita que, pelo calendário gregoriano, uma determinada cidade chinesa tenha sido fundada em 21 de junho de 1089 **D.C.**, ano da serpente no calendário chinês. Desde então, a cada 15 anos, seus habitantes promovem uma grande festa de comemoração. Portanto, houve festa em 1104, 1119, 1134, e assim por diante. Determine, no calendário gregoriano, o ano do século XXI em que a fundação dessa cidade será comemorada novamente no ano da serpente.

2. (UERJ) Observe a equação química que representa a fermentação do açúcar:



Uma das formas de equilibrar essa equação é igualar, em seus dois membros, as quantidades de átomos de

cada elemento químico. Esse processo dá origem ao seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 6x = y + 2z \\ 12x = 6z \\ 6x = 2y + z \end{cases}$$

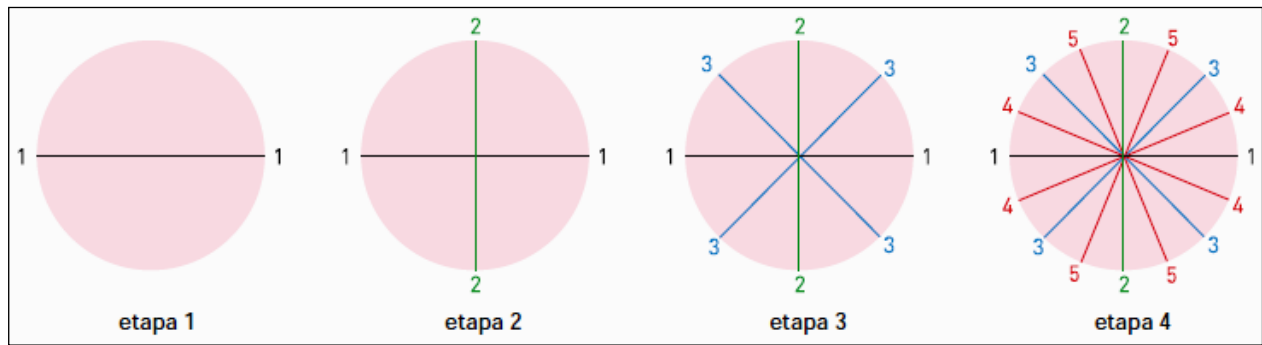
Determine o conjunto-solução do sistema e calcule os menores valores inteiros positivos de **x**, **y** e **z** que formam uma das soluções desse sistema.

### UTILIZE AS INFORMAÇÕES A SEGUIR PARA RESPONDER ÀS QUESTÕES DE NÚMEROS 03 A 06.

João recorta um círculo de papel com 10cm de raio. Em seguida, dobra esse recorte ao meio várias vezes, conforme ilustrado Abaixo.

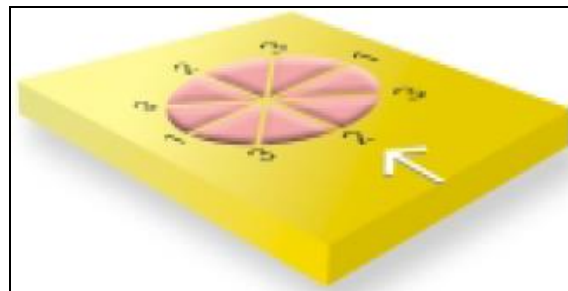


Depois de fazer diversas dobras, abre o papel e coloca o número 1 nas duas extremidades da primeira dobra. Sucessivamente, no meio de cada um dos arcos formados pelas dobras anteriores, João escreve a soma dos números que estão nas extremidades de cada arco. As figuras a seguir ilustram as quatro etapas iniciais desse processo.



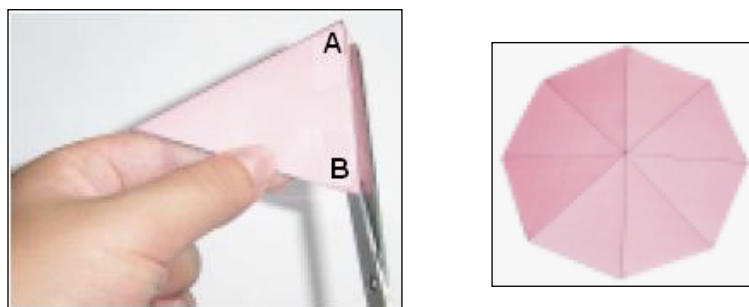
3. (UERJ) João continuou o processo de dobradura, escrevendo os números, conforme a descrição acima, até concluir dez etapas. Calcule a soma de todos os números que estarão escritos na etapa 10.

4. (UERJ) A figura correspondente à etapa 3 foi colada em uma roleta, que após ser girada pode parar, ao acaso, em apenas oito posições distintas. Uma seta indica o número correspondente a cada posição, como ilustra a figura abaixo.



João girou a roleta duas vezes consecutivas e anotou os números indicados pela seta após cada parada. Calcule a probabilidade de a soma desses números ser par.

5. (UERJ) Considere que João recortou a dobradura referente à figura da etapa 3 na linha que corresponde à corda AB indicada abaixo. Ele verificou, ao abrir o papel sem o pedaço recortado, que havia formado o seguinte polígono:



Calcule a área da parte do círculo que foi retirada pelo corte.

6. (UERJ) Considere, novamente, o polígono formado por João, do qual são retirados dois triângulos isósceles. Com os triângulos restantes é possível formar a superfície lateral de uma pirâmide hexagonal regular.



Calcule as medidas da altura e da aresta da base dessa pirâmide.

7. (UERJ) A International Electrotechnical Commission – IEC padronizou as unidades e os símbolos a serem usados em Telecomunicações e Eletrônica. Os prefixos **kibi**, **mebi** e **gibi**, entre outros, empregados para especificar múltiplos binários são formados a partir de prefixos já existentes no Sistema Internacional de Unidades – SI, acrescidos de **bi**, primeira sílaba da palavra binário. A tabela abaixo indica a correspondência entre algumas unidades do SI e da IEC.

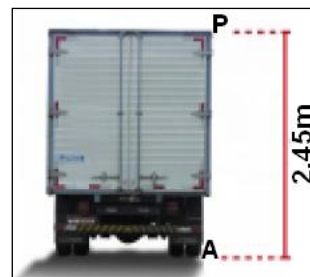
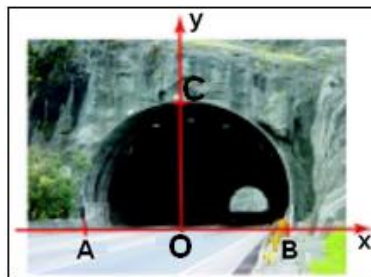
SI			IEC		
nome	símbolo	magnitude	nome	símbolo	magnitude
quilo	k	$10^3$	kibi	Ki	$2^{10}$
mega	M	$10^6$	mebi	Mi	$2^{20}$
giga	G	$10^9$	gibi	Gi	$2^{30}$

Um fabricante de equipamentos de informática, usuário do SI, anuncia um disco rígido de 30 gigabytes. Na linguagem usual de computação, essa medida corresponde a  $p \times 2^{30}$  bytes. Considere a tabela de logaritmos a seguir.

x	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
Log x	0,301	0,342	0,380	0,415	0,447	0,477

Calcule o valor de **p**.

8. (UERJ) A foto abaixo mostra um túnel cuja entrada forma um arco parabólico com base AB = 8m e altura central OC = 5,6m.



Observe, na foto, um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, cujo eixo horizontal Ox é tangente ao solo e o vertical Oy representa o eixo de simetria da parábola. Ao entrar no túnel, um caminhão com altura AP igual a 2,45m, como ilustrado a seguir, toca sua extremidade P em um determinado ponto do arco parabólico.

Calcule a distância do ponto P ao eixo vertical Oy.

**UTILIZE AS INFORMAÇÕES A SEGUIR PARA RESPONDER ÀS QUESTÕES DE NÚMEROS 9 E 10.**

Um sistema de numeração de base  $b$ , sendo  $b \geq 2$ , utiliza  $b$  algarismos:  $0, 1, 2, 3, \dots, b-1$ .  
 O sistema de numeração usual é o decimal. Quando escrevemos um número nesse sistema, a base 10 não precisa ser indicada. Por exemplo, o número 3548 corresponde a  $3 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 8 \times 10^0$ .  
 Em qualquer outro sistema, é preciso indicar a base. Por exemplo, o número  $(2043)_5$  está escrito na base  $b=5$  e corresponde a  $2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0$ , ou seja, 273 no sistema decimal.

9. (UERJ) Sabe-se que, em qualquer base, o acréscimo de zeros à esquerda da representação de um número não altera seu valor. Os números  $(301)_7$  e  $(0301)_7$  são, portanto, iguais e formados por três algarismos. Calcule, no sistema de numeração de base 7, a quantidade total de números que possuem somente quatro algarismos distintos.

10. (UERJ) Admita a possibilidade de contar objetos de duas formas, uma na base  $x$  e outra na base  $(x + 3)$ . Ao empregar essas duas maneiras para contar um determinado grupo de objetos, obtemos:  $(2343)_x = (534)_{x+3}$ . Calcule o valor da base  $x$  e as outras duas raízes da equação resultante.



**Exame Discursivo – 2007 - GABARITO**

1. (UERJ) Os anos do calendário chinês, um dos mais antigos que a história registra, começam sempre em uma lua nova, entre 21 de janeiro e 20 de fevereiro do calendário gregoriano. Eles recebem nomes de animais, que se repetem em ciclos de doze anos. A tabela abaixo apresenta o ciclo mais recente desse calendário.

ANO DO CALENDÁRIO CHINÊS	
início no calendário gregoriano	nome
31 - janeiro - 1995	porco
19 - fevereiro - 1996	rato
08 - fevereiro - 1997	boi
28 - janeiro - 1998	tigre
16 - fevereiro - 1999	coelho
05 - fevereiro - 2000	dragão
24 - janeiro - 2001	serpente
12 - fevereiro - 2002	cavalo
01 - fevereiro - 2003	cabra
22 - fevereiro - 2004	macaco
09 - fevereiro - 2005	galo
29 - janeiro - 2006	cão

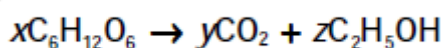
Admita que, pelo calendário gregoriano, uma determinada cidade chinesa tenha sido fundada em 21 de junho de 1089 D.C., ano da serpente no calendário chinês. Desde então, a cada 15 anos, seus habitantes promovem uma grande festa de comemoração. Portanto, houve festa em 1104, 1119, 1134, e assim por diante. Determine, no calendário gregoriano, o ano do século XXI em que a fundação dessa cidade será comemorada novamente no ano da serpente.

**Solução.** O ano da serpente ocorre a cada 12 anos e a festa da cidade ocorre a cada 15 anos. Logo as festas ocorrerão simultaneamente de 60 em 60 anos, pois  $MMC(12,15) = 60$ . Iniciando de 1089, temos:

$$\begin{cases} \text{Século XXI : ano} > 2001 \\ 1089 + 60k > 2001; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 60k > 2001 - 1089 \Rightarrow 60k > 912 \Rightarrow k > 15,2 \rightarrow k = 16$$

$$\text{Ano} = 1089 + 60 \cdot (16) = 1089 + 960 = 2049$$

2. (UERJ) Observe a equação química que representa a fermentação do açúcar:



Uma das formas de equilibrar essa equação é igualar, em seus dois membros, as quantidades de átomos de

cada elemento químico. Esse processo dá origem ao seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 6x = y + 2z \\ 12x = 6z \\ 6x = 2y + z \end{cases}$$

Determine o conjunto-solução do sistema e calcule os menores valores inteiros positivos de  $x$ ,  $y$  e  $z$  que formam uma das soluções desse sistema.

**Solução.** Igualando a 1ª equação com a 3ª equação, temos:

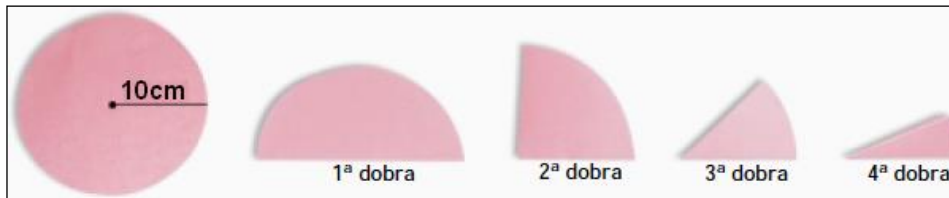
$$\begin{cases} 6x = y + 2z \\ 6x = 2y + z \end{cases} \Rightarrow 0 = y - z \Rightarrow y = z$$

Na 2ª equação, temos que  $2x = z$ . Logo o sistema é indeterminado e a solução é:  $S = \{(x, 2x, 2x)\}$ .

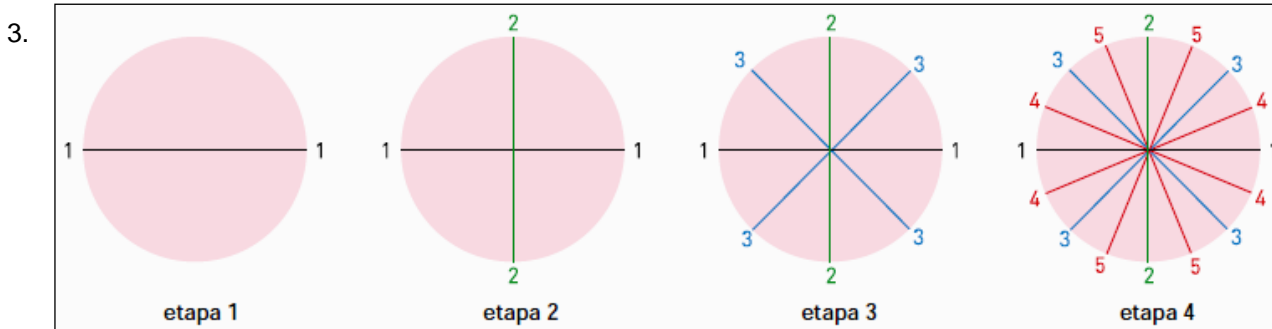
A menor solução será para  $x = 1$ :  $S = \{(1, 2, 2)\}$ .

**UTILIZE AS INFORMAÇÕES A SEGUIR PARA RESPONDER ÀS QUESTÕES DE NÚMEROS 03 A 06.**

João recorta um círculo de papel com 10cm de raio. Em seguida, dobra esse recorte ao meio várias vezes, conforme ilustrado Abaixo.



Depois de fazer diversas dobras, abre o papel e coloca o número 1 nas duas extremidades da primeira dobra. Sucessivamente, no meio de cada um dos arcos formados pelas dobras anteriores, João escreve a soma dos números que estão nas extremidades de cada arco. As figuras a seguir ilustram as quatro etapas iniciais desse processo.

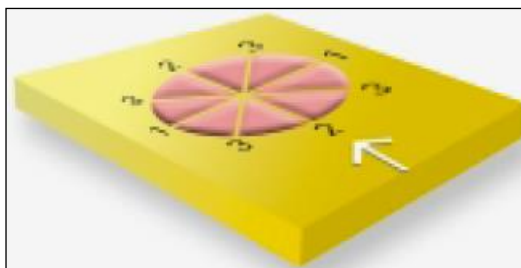


(UERJ) João continuou o processo de dobradura, escrevendo os números, conforme a descrição acima, até concluir dez etapas. Calcule a soma de todos os números que estarão escritos na etapa 10.

**Solução. Observando as somas em cada etapa, temos:**

$$\begin{aligned}
 & \text{etapa1: } 1 + 1 = 2 \\
 & \text{etapa2: } 2 \cdot (1) + 2 \cdot (2) = 2 + 4 = 6 \\
 & \text{etapa3: } 2 \cdot (1) + 2 \cdot (2) + 4 \cdot (3) = 2 + 4 + 12 = 18 \\
 & \text{etapa4: } 2 \cdot (1) + 2 \cdot (2) + 4 \cdot (3) + 4 \cdot (4) + 4 \cdot (5) = 2 + 4 + 12 + 16 + 20 = 54 \\
 & \text{razão: } q = 3 \\
 & a_1 = 2 \Rightarrow \text{etapa10: } a_{10} = 2 \cdot (3)^{10-1} = 2 \cdot (3)^9 = 2 \cdot (19683) = 39366
 \end{aligned}
 \rightarrow \text{PG: } (2, 6, 18, 54, \dots)$$

4. (UERJ) A figura correspondente à etapa 3 foi colada em uma roleta, que após ser girada pode parar, ao acaso, em apenas oito posições distintas. Uma seta indica o número correspondente a cada posição, como ilustra a figura abaixo.

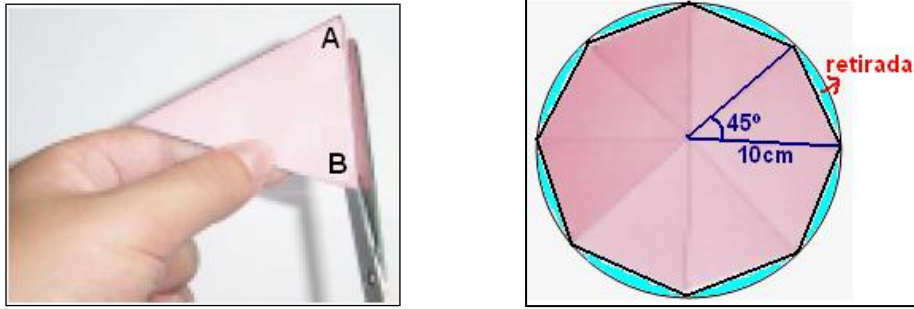


João girou a roleta duas vezes consecutivas e anotou os números indicados pela seta após cada parada. Calcule a probabilidade de a soma desses números ser par.

**Solução. O espaço amostral corresponde a oito números. Há dois pares e seis ímpares. Os eventos são independentes. Para que a soma seja par, os resultados devem ser (par, par) ou (ímpar, ímpar).**

$$\begin{cases}
 P(\text{par, par}) = \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \\
 P(\text{ímpar, ímpar}) = \frac{6}{8} \cdot \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}
 \end{cases}
 \Rightarrow P(\text{soma par}) = P(\text{par, par}) + P(\text{ímpar, ímpar}) = \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

5. (UERJ) Considere que João recortou a dobradura referente à figura da etapa 3 na linha que corresponde à corda AB indicada abaixo. Ele verificou, ao abrir o papel sem o pedaço recortado, que havia formado o seguinte polígono:

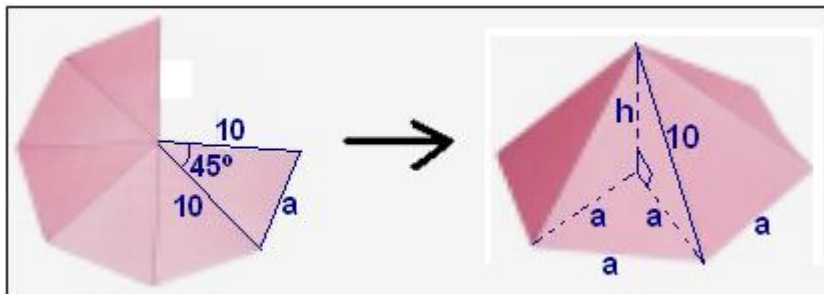


Calcule a área da parte do círculo que foi retirada pelo corte.

**Solução.** Há oito partes retiradas. Elas correspondem à diferença entre a área do círculo e a soma das áreas dos triângulos isósceles de ângulo central igual a  $45^\circ$ . Temos:

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad & \left\{ \begin{aligned} \text{Área(triângulo)} &= \frac{(10) \cdot (10) \cdot \text{sen}45^\circ}{2} = 50 \cdot \text{sen}45^\circ = 50 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 25\sqrt{2} \text{ cm}^2 \\ \text{Área(círculo)} &= \pi R^2 = \pi (10)^2 = 100\pi \text{ cm}^2 \end{aligned} \right. \\
 \text{ii)} \quad & \text{Área(retirada)} = \text{Área(círculo)} - 8 \cdot \text{Área(triângulo)} = 100\pi - 8 \cdot (25\sqrt{2}) = 100\pi - 200\sqrt{2} = 100 \cdot (\pi - 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

6. (UERJ) Considere, novamente, o polígono formado por João, do qual são retirados dois triângulos isósceles. Com os triângulos restantes é possível formar a superfície lateral de uma pirâmide hexagonal regular.



Calcule as medidas da altura e da aresta da base dessa pirâmide.

**Solução.** A pirâmide hexagonal terá aresta da base medindo  $a$  cuja medida também será do raio da circunferência que circunscreve a base. Calculando os elementos indicados, temos:

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad & \text{Aresta: } a^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot (10) \cdot (10) \cdot \cos 45^\circ \Rightarrow a = \sqrt{200 - 200 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{100 \cdot (2 - \sqrt{2})} = 10 \cdot \sqrt{(2 - \sqrt{2})} \text{ cm} \\
 \text{ii)} \quad & \text{Altura: } 10^2 = h^2 + a^2 \Rightarrow h^2 = 100 - 100 \cdot (2 - \sqrt{2}) \Rightarrow h^2 = 100\sqrt{2} - 100 \Rightarrow h = \sqrt{100 \cdot (\sqrt{2} - 1)} = 10 \cdot \sqrt{\sqrt{2} - 1} \text{ cm}
 \end{aligned}$$

7. (UERJ) A International Electrotechnical Commission – IEC padronizou as unidades e os símbolos a serem usados em Telecomunicações e Eletrônica. Os prefixos **kibi**, **mebi** e **gibi**, entre outros, empregados para especificar múltiplos binários são formados a partir de prefixos já existentes no Sistema Internacional de Unidades – SI, acrescidos de **bi**, primeira sílaba da palavra binário. A tabela abaixo indica a correspondência entre algumas unidades do SI e da IEC.

SI			IEC		
nome	símbolo	magnitude	nome	símbolo	magnitude
quilo	k	$10^3$	kibi	Ki	$2^{10}$
mega	M	$10^6$	mebi	Mi	$2^{20}$
giga	G	$10^9$	gibi	Gi	$2^{30}$

Um fabricante de equipamentos de informática, usuário do SI, anuncia um disco rígido de 30 gigabytes. Na linguagem usual de computação, essa medida corresponde a  $p \times 2^{30}$  bytes. Considere a tabela de logaritmos a seguir.

x	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
Log x	0,301	0,342	0,380	0,415	0,447	0,477

Calcule o valor de  $p$ .

$$\begin{cases} 30G = 30 \cdot 10^9 \\ 30G = p \cdot 2^{30} \end{cases} \Rightarrow p \cdot 2^{30} = 30 \cdot 10^9 \Rightarrow p \cdot 2^{30} = 3 \cdot 10^{10}$$

$$\Rightarrow \log p = \log \frac{3 \cdot 10^{10}}{2^{30}} = \log(3 \cdot 10^{10}) - \log 2^{30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log p = \log 3 + 10 \cdot \log 10 - 30 \cdot \log 2$$

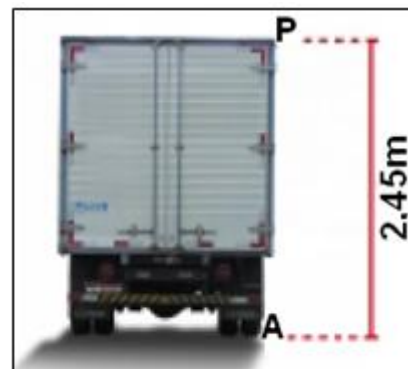
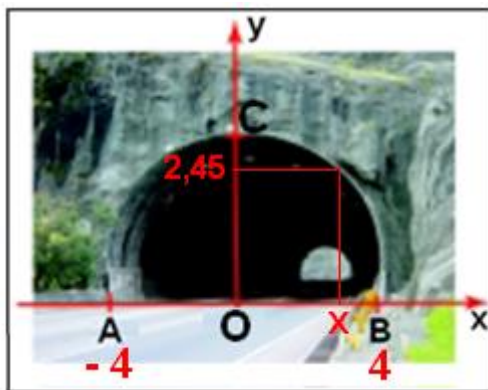
**Solução.** De acordo com 1ª tabela, temos:

Utilizando os valores da figura 2, temos:

$$\begin{cases} \log p = 0,477 + 10 - 30 \cdot (0,301) = 10,477 - 9,030 = 1,447 \\ \log 2,8 = 0,447 \Rightarrow 2,8 = 10^{0,447} \end{cases} \Rightarrow$$

$$p = 10 \cdot 10^{1,447} = 10 \cdot (2,8) = 28$$

8. (UERJ) A foto abaixo mostra um túnel cuja entrada forma um arco parabólico com base  $AB = 8\text{m}$  e altura central  $OC = 5,6\text{m}$ .



Observe, na foto, um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, cujo eixo horizontal  $Ox$  é tangente ao solo e o vertical  $Oy$  representa o eixo de simetria da parábola. Ao entrar no túnel, um caminhão com altura  $AP$  igual a  $2,45\text{m}$ , como ilustrado a seguir, toca sua extremidade  $P$  em um determinado ponto do arco parabólico.

Calcule a distância do ponto  $P$  ao eixo vertical  $Oy$ .

**Solução.** O arco de parábola está localizado de forma que o eixo de simetria seja  $x = 0$ .

Logo se  $AB = 8$ , então  $A = -4$  e  $B = 4$ , considerando que são raízes e opostas pelo eixo.

O ponto  $C$  é a interseção da parábola com o eixo  $Y$  e coincide com o máximo. Desta forma, concluímos que:

i)  $f(x) = ax^2 + c$ . O valor de  $b$  é nulo, pois a soma das raízes é  $(-4) + 4 = 0$ . Logo,  $S = -b/2 = 0 \Rightarrow b = 0$ .

ii)  $a < 0$ , pois a concavidade da parábola é para baixo. O produto das raízes é  $P = (-4) \cdot (4) = -16$ .

Pela relação de Girard  $P = c/a = 5,6/a \Rightarrow 5,6/a = -16 \Rightarrow a = -5,6/16$ .

A distância pedida é a abscissa  $x'$  cuja imagem é a altura do caminhão  $2,45\text{m}$ . Substituindo na função, temos:

$$\begin{cases} f(x) = -\frac{5,6}{16}x^2 + 5,6 \\ f(x) = 2,45 \end{cases} \Rightarrow -\frac{5,6}{16}x^2 + 5,6 = 2,45 \Rightarrow \frac{5,6}{16}x^2 = 3,15 \Rightarrow x^2 = \frac{(16) \cdot (3,15)}{5,6} = \frac{(2) \cdot (3,15)}{0,7} = (2)(4,5) \Rightarrow$$

$$x' = d = \sqrt{9} = 3\text{m}$$

**UTILIZE AS INFORMAÇÕES A SEGUIR PARA RESPONDER ÀS QUESTÕES DE NÚMEROS 9 E 10.**

Um sistema de numeração de base  $b$ , sendo  $b \geq 2$ , utiliza  $b$  algarismos:  $0, 1, 2, 3, \dots, b-1$ .  
 O sistema de numeração usual é o decimal. Quando escrevemos um número nesse sistema, a base 10 não precisa ser indicada. Por exemplo, o número 3548 corresponde a  $3 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 8 \times 10^0$ .  
 Em qualquer outro sistema, é preciso indicar a base. Por exemplo, o número  $(2043)_5$  está escrito na base  $b=5$  e corresponde a  $2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0$ , ou seja, 273 no sistema decimal.

9. (UERJ) Sabe-se que, em qualquer base, o acréscimo de zeros à esquerda da representação de um número não altera seu valor. Os números  $(301)_7$  e  $(0301)_7$  são, portanto, iguais e formados por três algarismos. Calcule, no sistema de numeração de base 7, a quantidade total de números que possuem somente quatro algarismos distintos.

**Solução.** No sistema de numeração de base 7 os algarismos são  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , isto é, os restos possíveis na divisão por 7. Como não se considera zero à esquerda as possibilidades iniciam com seis algarismos:

$$\frac{1^\circ \text{algarismo}}{6 \text{ possibilidades}} \cdot \frac{2^\circ \text{algarismo}}{6 \text{ possibilidades}} \cdot \frac{3^\circ \text{algarismo}}{5 \text{ possibilidades}} \cdot \frac{4^\circ \text{algarismo}}{4 \text{ possibilidades}} \rightarrow (6) \cdot (6) \cdot (5) \cdot (4) = 720.$$

Logo há 720 números distintos.

10. (UERJ) Admita a possibilidade de contar objetos de duas formas, uma na base  $x$  e outra na base  $(x + 3)$ . Ao empregar essas duas maneiras para contar um determinado grupo de objetos, obtemos:

$(2343)_x = (534)_{x+3}$ . Calcule o valor da base  $x$  e as outras duas raízes da equação resultante.

**Solução.** Escrevendo as contagens nas respectivas bases, temos:

$$\begin{aligned} 2x^3 + 3x^2 + 4x + 3 &= 5(x+3)^2 + 3(x+3) + 4 \Rightarrow 2x^3 + 3x^2 + 4x + 3 = 5(x+3)^2 + 3(x+3) + 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x^3 + 3x^2 + 4x + 3 &= 5(x^2 + 6x + 9) + 3x + 9 + 4 \Rightarrow 2x^3 + 3x^2 + 4x + 3 = 5x^2 + 30x + 45 + 3x + 13 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x^3 + 3x^2 + 4x + 3 &= 5x^2 + 33x + 58 \Rightarrow 2x^3 - 2x^2 - 29x - 55 = 0 \end{aligned}$$

Essa equação algébrica possui uma raiz inteira e positiva, pois representa a base. Pela pesquisa de raízes as possibilidades são:  $\{\pm 1; \pm 5; \pm 11; \pm 55; \pm 1/2; \pm 5/2; \pm 11/2; \pm 55/2\}$ .

Destas opções para a base, o valor 5 é o mais indicado.

Verificando se é raiz, temos:  $2(5)^3 - 2(5)^2 - 29(5) - 55 = 250 - 50 - 145 - 55 = 250 - 250 = 0$ .

Logo,  $x = 5$  é a base.

Para encontrar as outras raízes, aplicamos o dispositivo Briot-Ruffini.

O quociente é  $Q(x) = 2x^2 + 8x + 11 = 0$ .

5	2	-2	-29	-55
	2	8	11	0

Resolvendo, vem:

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{(8)^2 - 4(2)(11)}}{2(2)} = \frac{-8 \pm \sqrt{-24}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-8 + 2i\sqrt{6}}{4} = \frac{-4 + i\sqrt{6}}{2} \\ x = \frac{-8 - 2i\sqrt{6}}{4} = \frac{-4 - i\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$



**Exame Discursivo - 2008**

1. (UERJ) Observe parte da tabela do quadro de medalhas dos Jogos Pan-americanos do Rio de Janeiro em 2007. Com base na tabela, é possível formar a matriz quadrada  $A$  cujos elementos  $a_{ij}$  representam o número de medalhas do tipo  $j$  que o país  $i$  ganhou, sendo  $i$  e  $j$  pertencentes ao conjunto  $\{1,2,3\}$ . Para fazer uma outra classificação desses países, são atribuídos às medalhas os seguintes valores:

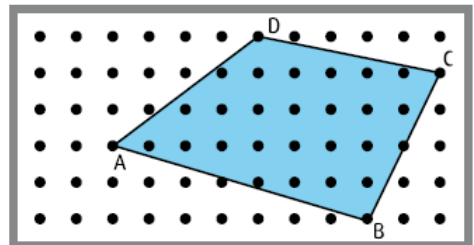
país	medalhas			total
	tipos			
	1- ouro	2- prata	3- bronze	
1 - Estados Unidos	97	88	52	237
2 - Cuba	59	35	41	135
3 - Brasil	54	40	67	161

- ouro: 3 pontos;
- prata: 2 pontos;
- bronze: 1 ponto.

Esses valores compõem a matriz  $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Determine, a partir do cálculo do produto  $AV$ , o número de pontos totais obtidos pelos três países separadamente.

2. (UERJ) Um tabuleiro retangular com pregos dispostos em linhas e colunas igualmente espaçadas foi usado em uma aula sobre área de polígonos. A figura abaixo representa o tabuleiro com um elástico fixado em quatro pregos indicados pelos pontos **A**, **B**, **C** e **D**.

Considere  $\underline{u}$  a unidade de área equivalente ao menor quadrado que pode ser construído com vértices em quatro pregos do tabuleiro. Calcule, em  $\underline{u}$ , a área do quadrilátero  $ABCD$  formado pelo elástico.



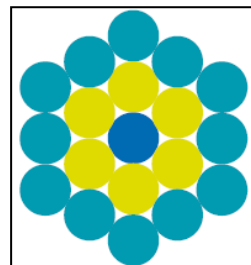
3. (UERJ) O peso  $P$  de um objeto, a uma altura  $h$  acima do nível do mar, satisfaz a seguinte equação:

$$P = \left( \frac{r}{r+h} \right)^2 \cdot P_0$$

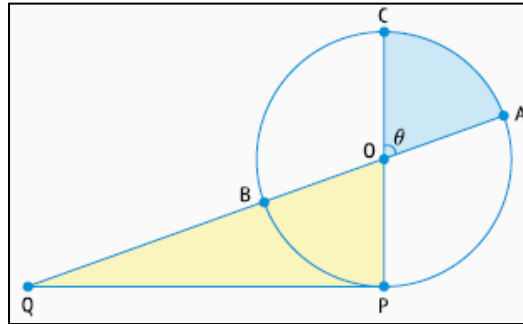
onde  $P_0$ : peso do objeto ao nível do mar;  $r$ : raio da Terra. Sabe-se que  $P$  equivale a 81% de  $P_0$  quando o objeto se encontra a uma altura  $h_1$ . Calcule, em função de  $r$ , o valor de  $h_1$ .

4. (UERJ) Uma fábrica de doces vende caixas com 50 unidades de bombons recheados com dois sabores, morango e caramelo. O custo de produção dos bombons de morango é de 10 centavos por unidade, enquanto o dos bombons de caramelo é de 20 centavos por unidade. Os demais custos de produção são desprezíveis. Sabe-se que cada caixa é vendida por R\$7,20 e que o valor de venda fornece um lucro de 20% sobre o custo de produção de cada bombom. Calcule o número de bombons de cada sabor contidos em uma caixa.

5. (UERJ) Moedas idênticas de 10 centavos de real foram arrumadas sobre uma mesa, obedecendo à disposição apresentada no desenho: uma moeda no centro e as demais formando camadas tangentes. Considerando que a última camada é composta por 84 moedas, calcule a quantia, em reais, do total de moedas usadas nessa arrumação.

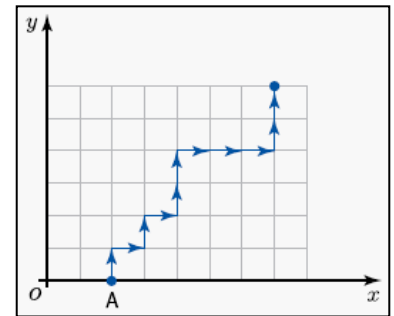


6. (UERJ) Considere um setor circular AOC, cujo ângulo central  $\Theta$  é medido em radianos. A reta que tangencia o círculo no extremo P do diâmetro CP encontra o prolongamento do diâmetro AB em um ponto Q, como ilustra a figura.



Sabendo que o ângulo  $\Theta$  satisfaz a igualdade  $\text{tg}\Theta = 2\Theta$ , calcule a razão entre a área do setor AOC e a área do triângulo OPQ.

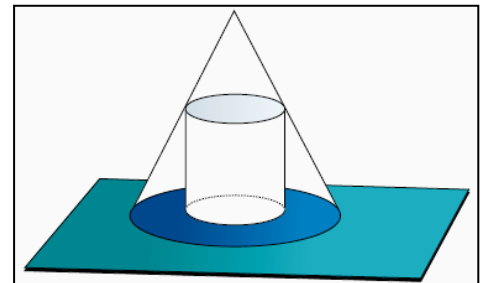
7. (UERJ) Uma partícula parte do ponto  $A(2; 0)$ , movimentando-se para cima (C) ou para a direita (D), com velocidade de uma unidade de comprimento por segundo no plano cartesiano. O gráfico abaixo exemplifica uma trajetória dessa partícula, durante 11 segundos, que pode ser descrita pela sequência de movimentos CDCDCDDDDCC.



Admita que a partícula faça outra trajetória composta somente pela sequência de movimentos CDD, que se repete durante 5 minutos, partindo de A. Determine a equação da reta que passa pela origem  $O(0,0)$  e pelo último ponto dessa nova trajetória.

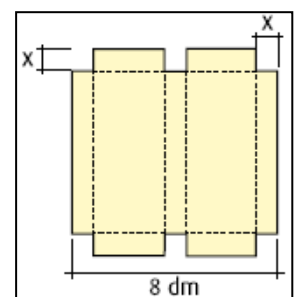
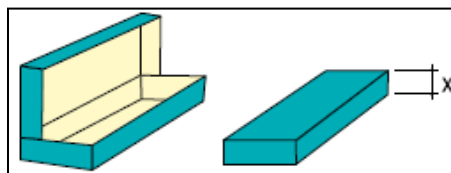
8. (UERJ) Um cilindro circular reto é inscrito em um cone, de modo que os eixos desses dois sólidos sejam colineares, conforme representado na ilustração.

A altura do cone e o diâmetro da sua base medem, cada um, 12cm. Admita [que as medidas, em centímetros, da altura e do raio do cilindro variem no intervalo  $]0;12[$  de modo que ele permaneça inscrito nesse cone. Calcule a medida que a altura do cilindro deve ter para que sua área lateral seja máxima.



9. (UERJ) Para fazer uma caixa, foi utilizado um quadrado de papelão de espessura desprezível e 8dm de lado, do qual foram recortados e retirados seis quadrados menores de lado  $x$ .

Observe a ilustração. Em seguida, o papelão foi dobrado nas linhas pontilhadas, assumindo a forma de um paralelepípedo retângulo, de altura  $x$ , como mostram os esquemas.



Quando  $x = 2\text{dm}$ , o volume da caixa é igual a  $8\text{dm}^3$ . Determine outro valor de  $x$  para que a caixa tenha volume igual a  $8\text{dm}^3$ .

10. (UERJ) Em cada ponto  $(x, y)$  do plano cartesiano, o valor de T é definido pela seguinte equação:

$$T = \frac{200}{x^2 + y^2 - 4x + 8}$$

Sabe-se que T assume seu valor máximo, 50, no ponto (2,0). Calcule a área da região que corresponde ao conjunto dos pontos do plano cartesiano para os quais  $T \geq 20$ .



**Exame Discursivo – 2008 - GABARITO**

1. (UERJ) Observe parte da tabela do quadro de medalhas dos Jogos Pan-americanos do Rio de Janeiro em 2007. Com base na tabela, é possível formar a matriz quadrada  $A$  cujos elementos  $a_{ij}$  representam o número de medalhas do tipo  $j$  que o país  $i$  ganhou, sendo  $i$  e  $j$  pertencentes ao conjunto  $\{1,2,3\}$ . Para fazer uma outra classificação desses países, são atribuídos às medalhas os seguintes valores:

país	medalhas			
	tipos			total
	1- ouro	2- prata	3- bronze	
1 - Estados Unidos	97	88	52	237
2 - Cuba	59	35	41	135
3 - Brasil	54	40	67	161

- ouro: 3 pontos;
- prata: 2 pontos;
- bronze: 1 ponto.

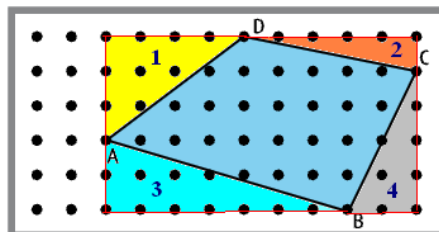
Esses valores compõem a matriz  $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Determine, a partir do cálculo do produto  $AV$ , o número de pontos totais obtidos pelos três países separadamente.

**Solução. Organizando as matrizes de forma a ser possível o produto das matrizes, temos:**

$$A \cdot V = \begin{bmatrix} 97 & 88 & 52 \\ 59 & 35 & 41 \\ 54 & 40 & 67 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 97 \cdot 3 + 88 \cdot 2 + 52 \cdot 1 \\ 59 \cdot 3 + 35 \cdot 2 + 41 \cdot 1 \\ 54 \cdot 3 + 40 \cdot 2 + 67 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 519 \\ 288 \\ 309 \end{bmatrix} \cdot \text{Estados Unidos: 519; Cuba: 288 e Brasil: 309.}$$

2. (UERJ) Um tabuleiro retangular com pregos dispostos em linhas e colunas igualmente espaçadas foi usado em uma aula sobre área de polígonos. A figura abaixo representa o tabuleiro com um elástico fixado em quatro pregos indicados pelos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ .

Considere  $\underline{u}$  a unidade de área equivalente ao menor quadrado que pode ser construído com vértices em quatro pregos do tabuleiro. Calcule, em  $\underline{u}$ , a área do quadrilátero  $ABCD$  formado pelo elástico.



**Solução. Fechando um retângulo de dimensões 9 x 5, temos uma área de 45. São identificados em volta do quadrilátero quatro triângulos retângulos: 1, 2, 3 e 4. Calculando suas áreas e a diferença em relação ao retângulo, temos:**

$$\begin{cases} T(1) = \frac{(3)(4)}{2} = 6 \\ T(2) = \frac{(5)(1)}{2} = 2,5 \\ T(3) = \frac{(2)(7)}{2} = 7 \\ T(4) = \frac{(2)(4)}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{Soma(Triângulos)} = 6 + 2,5 + 7 + 4 = 19,5 \Rightarrow A(\text{Quadrilátero}) = 45 - 19,5 = 25,5$$

3. (UERJ) O peso  $P$  de um objeto, a uma altura  $h$  acima do nível do mar, satisfaz a seguinte equação:

$$P = \left( \frac{r}{r+h} \right)^2 \cdot P_0, \text{ onde } P_0: \text{ peso do objeto ao nível do mar; } r: \text{ raio da Terra. Sabe-se que } P \text{ equivale a 81\% de } P_0 \text{ quando o objeto se encontra a uma altura } h_1. \text{ Calcule, em função de } r, \text{ o valor de } h_1.$$

**Solução. Substituindo o valor indicado de  $P$  em relação a  $P_0$ , temos:**

$$\begin{cases} P = \left( \frac{r}{r+h} \right)^2 \cdot P_0 \Rightarrow 0,81 \cdot P_0 = \left( \frac{r}{r+h_1} \right)^2 \cdot P_0 \Rightarrow \frac{r}{r+h_1} = \sqrt{\frac{81}{100}} \Rightarrow \frac{r}{r+h_1} = \frac{9}{10} \Rightarrow 9h_1 + 9r = 10r \Rightarrow 9h_1 = 10r - 9r \Rightarrow h_1 = \frac{r}{9} \\ P = 0,81 \cdot P_0 \end{cases}$$

4. (UERJ) Uma fábrica de doces vende caixas com 50 unidades de bombons recheados com dois sabores, morango e caramelo. O custo de produção dos bombons de morango é de 10 centavos por unidade, enquanto o dos bombons de caramelo é de 20 centavos por unidade. Os demais custos de produção são desprezíveis. Sabe-se que cada caixa é vendida por R\$7,20 e que o valor de venda fornece um lucro de 20% sobre o custo de produção de cada bombom. Calcule o número de bombons de cada sabor contidos em uma caixa.

**Solução. Cada bombom com o lucro passa a custar:**

**i) morango: R\$0,10 x (1,2) = R\$0,12**

**ii) caramelo: R\$0,20 x (1,20) = R\$0,24**

**Considerando  $x$  o número de bombons de morango e  $y$  o número de bombons de caramelo, temos:**

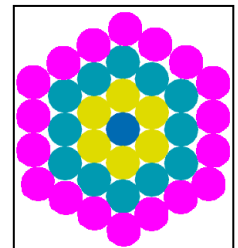
$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 0,12x + 0,24y = 7,20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 50 \\ 12x + 24y = 720 \rightarrow (\div 12) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 50 \rightarrow \times(-1) \\ x + 2y = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - y = -50 \\ x + 2y = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 10 \text{ (caramelo)} \\ x = 50 - 10 = 40 \text{ (morango)} \end{cases}$$

5. (UERJ) Moedas idênticas de 10 centavos de real foram arrumadas sobre uma mesa, obedecendo à disposição apresentada no desenho: uma moeda no centro e as demais formando camadas tangentes. Considerando que a última camada é composta por 84 moedas, calcule a quantia, em reais, do total de moedas usadas nessa arrumação.

**Solução. A partir da 2ª camada o número de moedas são 6, 12, 18,... Isto é uma progressão aritmética de razão 6. O número de camadas e o total de moedas valem:**

$$\begin{cases} a_n = 6 + (n-1) \cdot 6 \Rightarrow 84 = 6 + 6n - 6 \Rightarrow n = \frac{84}{6} = 14 \\ S_n = \frac{(6+84) \cdot 14}{2} = (90) \cdot 7 = 630 \end{cases} \Rightarrow \text{Total(moedas)} : 630 + 1 = 631 \text{ moedas} \Rightarrow$$

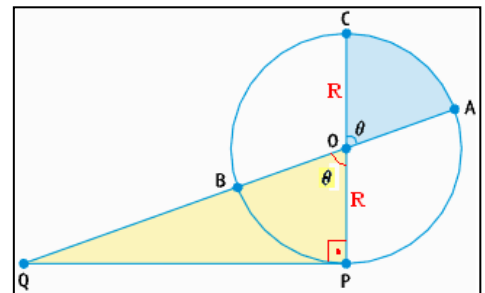
$$\Rightarrow \text{Total(reais)} = (631) \times R\$0,10 = R\$63,10$$



6. (UERJ) Considere um setor circular AOC, cujo ângulo central  $\theta$  é medido em radianos. A reta que tangencia o círculo no extremo P do diâmetro CP encontra o prolongamento do diâmetro AB em um ponto Q, como ilustra a figura. Sabendo que o ângulo  $\theta$  satisfaz a igualdade  $\text{tg}\theta = 2\theta$ , calcule a razão entre a área do setor AOC e a área do triângulo OPQ.

**Solução. O triângulo OPQ é retângulo em P, pois é ponto de tangência. Encontrando as áreas respectivas e a razão pedida, temos:**

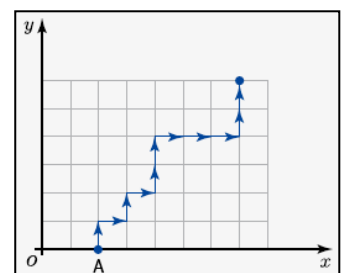
$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \begin{cases} A_{\text{OPQ}} = \frac{(QP) \cdot (OP)}{2} \\ \text{tg}\theta = \frac{QP}{OP} \Rightarrow QP = OP \cdot \text{tg}\theta \end{cases} \Rightarrow A_{\text{OPQ}} = \frac{(OP \cdot \text{tg}\theta) \cdot (OP)}{2} = \frac{(OP)^2 \cdot \text{tg}\theta}{2} = \frac{R^2 \cdot 2\theta}{2} \\ \text{ii)} \quad & \begin{cases} 2\pi - \pi R^2 \\ \theta - A_{\text{AOC}} \end{cases} \Rightarrow A_{\text{AOC}} = \frac{(\pi R^2)(\theta)}{2\pi} = \frac{(R^2)(\theta)}{2} \\ & \frac{A_{\text{AOC}}}{A_{\text{OPQ}}} = \frac{\frac{R^2\theta}{2}}{\frac{R^2 \cdot 2\theta}{2}} = \frac{R^2\theta}{2} \cdot \frac{2}{R^2 \cdot 2\theta} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



7. (UERJ) Uma partícula parte do ponto A(2; 0), movimentando-se para cima (C) ou para a direita (D), com velocidade de uma unidade de comprimento por segundo no plano cartesiano. O gráfico abaixo exemplifica uma trajetória dessa partícula, durante 11 segundos, que pode ser descrita pela sequência de movimentos CDCDCDDDDCC. Admita que a partícula faça outra trajetória composta somente pela sequência de movimentos CDD, que se repete durante 5 minutos, partindo de A. Determine a equação da reta que passa pela origem O(0,0) e pelo último ponto dessa nova trajetória.

**Solução. O movimento CDD, indica que haverá sempre o dobro de passos para direita do que foi para cima. Após 5 minutos passaram-se 5.(60) = 300 segundos. Como a partida foi do ponto (2,0), a posição final é (x + 2,y) com x = 2y. O total de movimentos será x + y = 2y + y = 300 ⇒ y = 100 e x = 2(100) = 200. A equação pedida passa pelos pontos (0,0) e (202,100):**

$$\begin{cases} y = mx + n \\ m = \frac{100 - 0}{202 - 0} = \frac{100}{202} = \frac{50}{101} \Rightarrow y = \frac{50}{101}x + n \\ (0,0) \in r \Rightarrow 0 = \frac{50}{101}(0) + n \Rightarrow n = 0. \text{ Logo, } y = \frac{50}{101}x \end{cases}$$



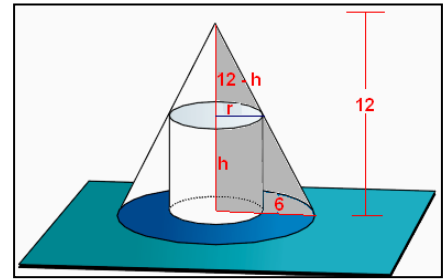
8. (UERJ) Um cilindro circular reto é inscrito em um cone, de modo que os eixos desses dois sólidos sejam colineares, conforme representado na ilustração. A altura do cone e o diâmetro da sua base medem, cada um, 12cm. Admita [que as medidas, em centímetros, da altura e do raio do cilindro variem no intervalo ]0;12[ de modo que ele permaneça inscrito nesse cone. Calcule a medida que a altura do cilindro deve ter para que sua área lateral seja máxima.

**Solução. A área lateral do cilindro é dada por  $A_l = 2\pi rh$ .**

**Estabelecendo a semelhança do triângulo sombreado, temos:**

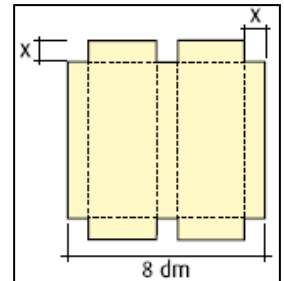
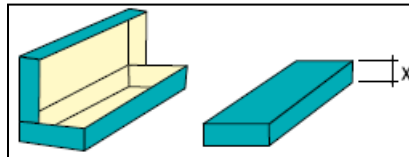
$$\frac{12-h}{r} = \frac{12}{6} \Rightarrow 12r = 72 - 6h \Rightarrow r = \frac{72-6h}{12}$$

$$A = 2\pi \left( \frac{72-6h}{12} \right) h = \frac{144\pi h - 12\pi h^2}{12} = 12\pi h - \pi h^2 \Rightarrow A_{\max} \Rightarrow h_{\max} = -\frac{12\pi}{2(-\pi)} = 6\text{cm}$$



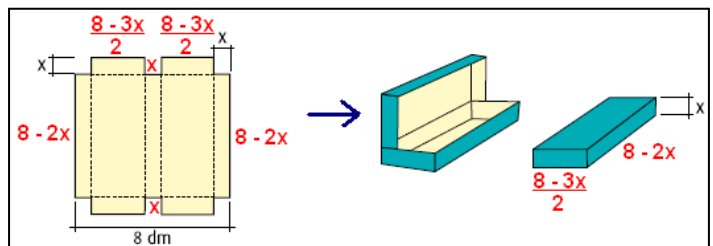
9. (UERJ) Para fazer uma caixa, foi utilizado um quadrado de papelão de espessura desprezível e 8dm de lado, do qual foram recortados e retirados seis quadrados menores de lado  $x$ .

Observe a ilustração. Em seguida, o papelão foi dobrado nas linhas pontilhadas, assumindo a forma de um paralelepípedo retângulo, de altura  $x$ , como mostram os esquemas.



Quando  $x = 2\text{dm}$ , o volume da caixa é igual a  $8\text{dm}^3$ . Determine outro valor de  $x$  para que a caixa tenha volume igual a  $8\text{dm}^3$ .

**Solução. Observe a figura com as dimensões finais após a dobradura.**



**Igualando o valor do volume ao produto das dimensões, temos:**

$$\left( \frac{8-3x}{2} \right) (8-2x) \cdot x = 8 \Rightarrow (8-3x)(8x-2x^2) = 16 \Rightarrow 6x^3 - 24x^2 - 16x^2 + 64x - 16 = 0 \Rightarrow 6x^3 - 40x^2 + 64x - 16 = 0 \Rightarrow 3x^3 - 20x^2 + 32x - 8 = 0$$

**Como  $x = 2$ , já é raiz, aplicamos o dispositivo Briot-Ruffini.**

**O quociente de grau 2 é:  $Q(x) = 3x^2 - 14x + 4$ . Encontrando os zeros, temos:**

$$3x^2 - 14x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 4(3)(4)}}{2(3)} = \frac{14 \pm \sqrt{148}}{6} = \frac{14 \pm 2\sqrt{37}}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7 + \sqrt{37}}{3} > \frac{8}{3} \rightarrow \text{incompatível} \left( x < \frac{8}{3} \right) \\ x_2 = \frac{7 - \sqrt{37}}{3} \Rightarrow \text{Outra medida: } x = \frac{7 - \sqrt{37}}{3} \end{cases}$$

2	3	-20	32	-8
	3	-14	4	0

10. (UERJ) Em cada ponto  $(x, y)$  do plano cartesiano, o valor de  $T$  é definido pela seguinte equação:

$$T = \frac{200}{x^2 + y^2 - 4x + 8}$$

Sabe-se que  $T$  assume seu valor máximo, **50**, no ponto **(2,0)**. Calcule a área da região que corresponde ao conjunto dos pontos do plano cartesiano para os quais  $T \geq 20$ .

**Solução. Para  $T \geq 20$ , temos:**

$$20 \leq \frac{200}{x^2 + y^2 - 4x + 8} \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 8 \leq 10 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 8 \leq 10 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 \leq 6$$

**Logo a área pedida é a da circunferência indicada:  $A = \pi R^2 = \pi \cdot 6 = 6\pi$ .**



**Exame Discursivo - 2009**

1. (UERJ) Admita dois números inteiros positivos, representados por  $a$  e  $b$ . Os restos das divisões de  $a$  e  $b$  por 8 são, respectivamente, 7 e 5. Determine o resto da divisão do produto  $a \cdot b$  por 8.

2. (UERJ) Maurren Maggi foi a primeira brasileira a ganhar uma medalha olímpica de ouro na modalidade salto a distância. Em um treino, no qual saltou  $n$  vezes, a atleta obteve o seguinte desempenho:

- todos os saltos de ordem ímpar foram válidos e os de ordem par, inválidos;
- O primeiro salto atingiu a marca de 7,04m, o terceiro a marca de 7,07m e assim sucessivamente cada salto aumentou sua medida em 3cm.

O último salto foi de ordem ímpar e atingiu a marca de 7,22m Calcule  $n$ .

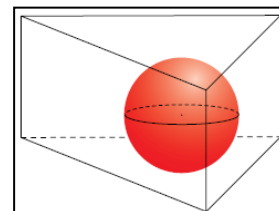
3. (UERJ) Em um salão há apenas 6 mulheres e 6 homens que sabem dançar. Calcule o número total de pares de pessoas de sexos opostos que podem ser formados para dançar. Um estudante resolveu esse problema do seguinte modo:

A primeira pessoa do casal pode ser escolhida de 12 modos, pois ela pode ser homem ou mulher. Escolhida a primeira, a segunda pessoa só poderá ser escolhida de 6 modos, pois deve ser de sexo diferente da primeira. Há, portanto,  $12 \times 6 = 72$  modos de formar um casal.

Essa solução está errada. Apresente a solução correta.

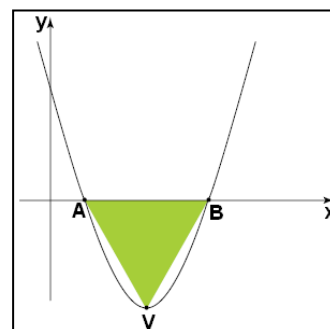
4. (UERJ) A figura abaixo representa uma caixa, com a forma de um prisma triangular regular, contendo uma bola perfeitamente esférica que tangencia internamente as cinco faces do prisma.

Admitindo  $\pi = 3$ , determine o valor aproximado da porcentagem ocupada pelo volume da bola em relação ao volume da caixa.



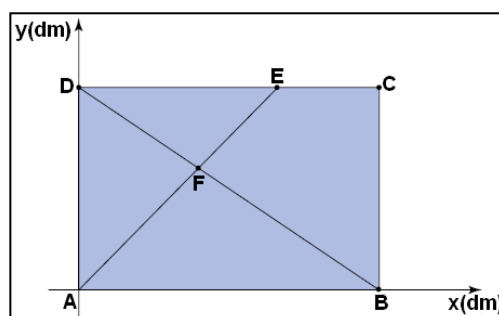
5. (UERJ) Observe a parábola de vértice  $V$ , gráfico da função quadrática definida por  $y = ax^2 + bx + c$ , que corta o eixo das abscissas nos pontos  $A$  e  $B$ .

Calcule o valor numérico de  $\Delta = b^2 - 4ac$  sabendo que o triângulo  $ABV$  é equilátero.



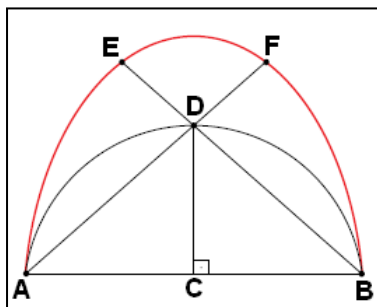
6. (UERJ) Em uma folha de fórmica retangular  $ABCD$ , com  $15\text{dm}$  de comprimento  $\overline{AB}$  por  $10\text{dm}$  de largura

$\overline{AD}$  um marceneiro traça dois segmentos de reta,  $\overline{AE}$  e  $\overline{BD}$ . No ponto  $F$ , onde o marceneiro pretende fixar um prego, ocorre a interseção desses segmentos. A figura representa a folha de fórmica no primeiro quadrante de um sistema de eixos coordenados. Considerando a medida do segmento  $\overline{EC}$  igual a  $5\text{dm}$ , determine as coordenadas do ponto  $F$ .



7. (UERJ) (Uma sequência de três números não nulos  $(a, b, c)$  está em progressão harmônica se seus inversos  $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ , nesta ordem, formam uma progressão aritmética. As raízes da equação a seguir, de incógnita  $x$ , estão em progressão harmônica:  $x^3 + mx^2 + 15x - 25 = 0$ . Considerando o conjunto dos números complexos, apresente todas as raízes dessa equação.

8. (UERJ) Observe a curva AEFB desenhada abaixo.



Analise os passos seguidos em sua construção:

- 1º) traçar um semicírculo de diâmetro  $\overline{AB}$  com centro C e raio 2cm;
- 2º) traçar o segmento  $\overline{CD}$ , perpendicular a  $\overline{AB}$ , partindo do ponto C e encontrando o ponto D, pertencente ao arco AB;
- 3º) construir o arco circular AE, de raio  $\overline{AB}$  e centro B, sendo E a interseção com o prolongamento do segmento  $\overline{BD}$ , no sentido B para D;
- 4º) construir o arco circular BF, de raio  $\overline{AB}$  e centro A, sendo F a interseção com o prolongamento do segmento  $\overline{AD}$ , no sentido A para D;
- 5º) desenhar o arco circular EF com centro D e raio  $\overline{DE}$ .

Determine o comprimento, em centímetros, da curva AEFB.

9. (UERJ) Os baralhos comuns são compostos de 52 cartas divididas em quatro naipes, denominados copas, espadas, paus e ouros, com treze cartas distintas de cada um deles. Observe a figura que mostra um desses baralhos, no qual as cartas representadas pelas letras **A, J, Q e K** são denominadas, respectivamente, **ás, valete, dama e rei**. Uma criança rasgou algumas cartas desse baralho, e as  $n$  cartas restantes, não rasgadas, foram guardadas em uma caixa. A tabela ao lado apresenta as probabilidades de retirar-se dessa caixa, ao acaso, as seguintes cartas:



carta	probabilidade
um rei	0,075
uma carta de copas	0,25
uma carta de copas ou rei	0,3

10. (UERJ) Considere o teorema e os dados a seguir para a solução desta questão.

Se  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\alpha + \beta$  são três ângulos agudos diferentes de  $\frac{\pi}{2} + k \in \mathbb{Z}$ , então  $\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - (\text{tg}\alpha)(\text{tg}\beta)}$ .

$\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  e  $\underline{c}$  são três ângulos agudos, sendo  $\text{tg}b = 2$  e  $\text{tg}(a + b + c) = \frac{4}{5}$

Calcule  $\text{tg}(a - b + c)$ .



**Exame Discursivo – 2009 - GABARITO**

1. (UERJ) Admita dois números inteiros positivos, representados por  $a$  e  $b$ . Os restos das divisões de  $a$  e  $b$  por 8 são, respectivamente, 7 e 5. Determine o resto da divisão do produto  $a.b$  por 8.

**Solução. Expressando as divisões indicadas e agrupando os múltiplos de 8, temos:**

$$\begin{cases} a = 8q_1 + 7 \\ b = 8q_2 + 5 \end{cases} \Rightarrow a.b = (8q_1 + 7)(8q_2 + 5) = 8.(8q_1q_2) + 8.(5q_1) + 8.(7q_2) + 35 \rightarrow \text{OBS: } (35 = 8 \times 4 + 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a.b = 8(8q_1q_2 + 5q_1 + 7q_2) + 8.(4) + 3 \Rightarrow a.b = 8(8q_1q_2 + 5q_1 + 7q_2 + 4) + 3 \Rightarrow a.b = 8k + 3$$

**O resto de  $(ab)$  na divisão por 8 é  $r = 3$ .**

2. (UERJ) Maurren Maggi foi a primeira brasileira a ganhar uma medalha olímpica de ouro na modalidade salto a distância. Em um treino, no qual saltou  $n$  vezes, a atleta obteve o seguinte desempenho:

- todos os saltos de ordem ímpar foram válidos e os de ordem par, inválidos;
- O primeiro salto atingiu a marca de 7,04m, o terceiro a marca de 7,07m e assim sucessivamente cada salto aumentou sua medida em 3cm. O último salto foi de ordem ímpar e atingiu a marca de 7,22m Calcule  $n$ .

**Solução. Os saltos validados foram  $a_1, a_3, a_5, \dots$ . Escrevendo a expressão do termo geral para a razão 3cm e considerando  $n'$  o número de saltos de ordem ímpar, temos:**

$$\begin{cases} a_{n'} = 704 + (n'-1).3 \\ a_{n'} = 7,22 \end{cases} \Rightarrow 704 + (n'-1).3 = 722 \Rightarrow 3n' - 3 + 704 = 722 \Rightarrow n' = \frac{722 - 701}{3} = \frac{21}{3} = 7.$$

**Como houve 7 saltos de ordem ímpar iniciando com  $a_1$  e finalizando com  $a_{13}$ . Houve 6 saltos de ordem par. Logo  $n = 7 + 6 = 13$ .**

3. (UERJ) Em um salão há apenas 6 mulheres e 6 homens que sabem dançar. Calcule o número total de pares de pessoas de sexos opostos que podem ser formados para dançar. Um estudante resolveu esse problema do seguinte modo:

A primeira pessoa do casal pode ser escolhida de 12 modos, pois ela pode ser homem ou mulher. Escolhida a primeira, a segunda pessoa só poderá ser escolhida de 6 modos, pois deve ser de sexo diferente da primeira. Há, portanto,  $12 \times 6 = 72$  modos de formar um casal. Essa solução está errada. Apresente a solução correta.

**Solução. Analisando a resposta do estudante, o erro está no fato de não levar em conta que se João fosse escolhido entre as 12 primeiras escolhas e dançasse com Maria escolhida dentre as 6 seria o mesmo par caso Maria fosse a primeira a ser escolhida dentre as 12 e João dentre os 6. Logo faltou dividir o número de casos por 2. Total 36. Uma solução diferente é: Cada uma das 6 mulheres escolhe seu par. Assim,  $M_1$  tem 6 homens para escolher,  $M_2$  também pode escolher 6, sucessivamente até  $M_6$ . Logo há  $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 36$  formas diferentes de formar um casal.**

4. (UERJ) A figura abaixo representa uma caixa, com a forma de um prisma triangular regular, contendo uma bola perfeitamente esférica que tangencia internamente as cinco faces do prisma. Admitindo  $\pi = 3$ , determine o valor aproximado da porcentagem ocupada pelo volume da bola em relação ao volume da caixa.

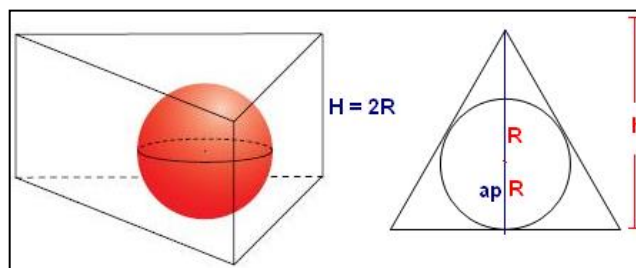
**Solução. A 2ª figura mostra o raio da esfera valendo o apótema do triângulo equilátero. A base da caixa é o triângulo equilátero e a altura do prisma vale o diâmetro da esfera.**

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow ap = R = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{l\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

$$V_{\text{caixa}} = A_b \cdot H = \left( \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \right) \cdot (2R) = \left( \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \right) \cdot \left( 2 \cdot \frac{l\sqrt{3}}{6} \right) = \frac{l^3}{4}$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4(3)(l^3)(3\sqrt{3})}{3(216)} = \frac{l^3\sqrt{3}}{18}$$

$$\frac{V_{\text{ESFERA}}}{V_{\text{CAIXA}}} = \frac{\frac{l^3\sqrt{3}}{18}}{\frac{l^3}{4}} = \frac{l^3\sqrt{3}}{18} \cdot \frac{4}{l^3} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cong 0,384 \rightarrow 38\%$$



5. (UERJ) Observe a parábola de vértice V, gráfico da função quadrática definida por  $y = ax^2 + bx + c$ , que corta o eixo das abscissas nos pontos A e B. Calcule o valor numérico de  $\Delta = b^2 - 4ac$  sabendo que o triângulo **ABV** é equilátero.

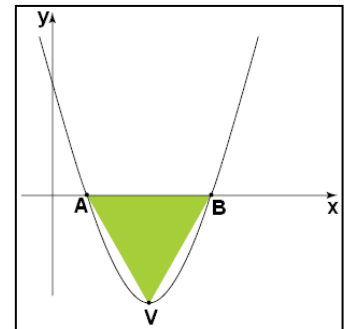
**Solução. A concavidade é para cima, logo  $a > 0$ . As raízes da função quadrática são dadas A e B:**

$$i) \begin{cases} A = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ B = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \Rightarrow \text{Lado(Triângulo)} = |B - A| = \left| \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |B - A| = \left| \frac{-b - \sqrt{\Delta} + b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{-2\sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

$$ii) \begin{cases} y_v = -\frac{\Delta}{4a} \\ y_v = \text{altura(Triângulo)} = \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3\Delta}}{2a} \end{cases} \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = \frac{\sqrt{3\Delta}}{2a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{\Delta}{2}\right)^2 = (\sqrt{3\Delta})^2 \Rightarrow \frac{\Delta^2}{4} = 3\Delta \Rightarrow \Delta^2 - 12\Delta = 0 \Rightarrow \Delta(\Delta - 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta = 12 \end{cases}$$

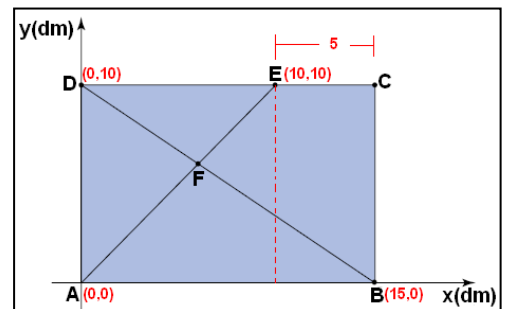


**As raízes são diferentes,  $\Delta > 0$ . Logo,  $\Delta = b^2 - 4ac = 12$ .**

6. (UERJ) Em uma folha de fórmica retangular ABCD, com **15dm** de comprimento  $\overline{AB}$  por **10dm** de largura  $\overline{AD}$  um marceneiro traça dois segmentos de reta,  $\overline{AE}$  e  $\overline{BD}$ . No ponto F, onde o marceneiro pretende fixar um prego, ocorre a interseção desses segmentos. A figura representa a folha de fórmica no primeiro quadrante de um sistema de eixos coordenados.

Considerando a medida do segmento  $\overline{EC}$  igual a **5dm**, determine as coordenadas do ponto F.

**Solução. Identificando as coordenadas dos pontos no sistema de eixo, temos que o ponto F será a interseção da retas  $r$  que passa por A e E com a reta  $s$  que passa por D e B.**



$$r: \begin{cases} 0 = a(0) + b \Rightarrow b = 0 \\ 10 = a(10) + b \end{cases} \Rightarrow 10a = 10 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow r: y = x$$

$$s: \begin{cases} 10 = a(0) + b \Rightarrow b = 10 \\ 0 = a(15) + b \end{cases} \Rightarrow 15a + 10 = 0 \Rightarrow a = -\frac{10}{15} = -\frac{2}{3} \Rightarrow s: y = -\frac{2x}{3} + 10$$

$$F = r \cap s \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -\frac{2x}{3} + 10 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{2x}{3} + 10 \Rightarrow 3x + 2x = 30 \Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow x = 6. \text{ Como } y = x \Rightarrow y = 6. \text{ Logo, } F = (6,6)$$

7. (UERJ) (Uma sequencia de três números não nulos (a, b, c) está em progressão harmônica se seus inversos  $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ , nesta ordem, formam uma progressão aritmética. As raízes da equação a seguir, de

incógnita  $x$ , estão em progressão harmônica:  $x^3 + mx^2 + 15x - 25 = 0$ . Considerando o conjunto dos números complexos, apresente todas as raízes dessa equação.

**SOLUÇÃO. Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são as raízes e  $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$  formam uma progressão aritmética, então podemos**

**escrever:**

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{1}{b} - r, \frac{1}{b}, \frac{1}{b} + r\right) &\Rightarrow \text{soma: } \frac{1}{b} - r + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + r = \frac{3}{b} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{ac + ab + bc}{abc} = \frac{\text{soma dos produtos 2 a 2}}{\text{produto}} = \frac{\frac{15}{1}}{-(-25)} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{3}{b} = \frac{3}{5} \Rightarrow b = 5 \rightarrow \text{raiz} \end{aligned} \right.$$

**Substituindo temos:**  $(5)^3 + m(5)^2 + 15(5) - 25 = 0 \Rightarrow 125 + 25m + 75 - 25 = 0 \Rightarrow m = -\frac{175}{25} = -7$

A equação então é:  $x^3 - 7x + 15x - 25 = 0$ . E  $x = 5$  é uma das raízes. Utilizando Briot-Ruffini, vem:

Resolvendo  $x^2 - 2x + 5 = 0$ , vem:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 2i \\ x_2 = 1 - 2i \end{cases}$$

5	1	-7	15	-25
	1	-2	5	0

As raízes são:  $\{5; 1 - 2i; 1 + 2i\}$ .

8. (UERJ) Observe a curva AEFB desenhada abaixo.

Analise os passos seguidos em sua construção:

(1º) traçar um semicírculo de diâmetro  $\overline{AB}$  com centro C e raio 2cm;

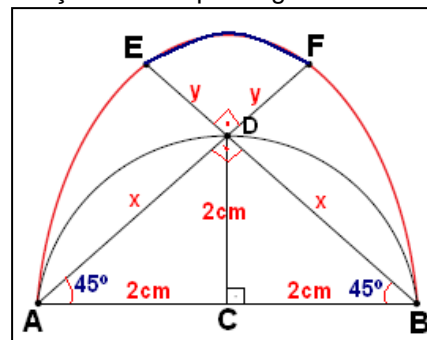
(2º) traçar o segmento  $\overline{CD}$ , perpendicular a  $\overline{AB}$ , partindo do ponto C e encontrando o ponto D, pertencente ao arco AB;

(3º) construir o arco circular AE, de raio  $\overline{AB}$  e centro B, sendo E a interseção com o prolongamento do segmento  $\overline{BD}$ , no sentido B para D;

(4º) construir o arco circular BF, de raio  $\overline{AB}$  e centro A, sendo F a interseção com o prolongamento do segmento  $\overline{AD}$ , no sentido A para D;

(5º) desenhar o arco circular EF com centro D e raio  $\overline{DE}$ .

Determine o comprimento, em centímetros, da curva AEFB.



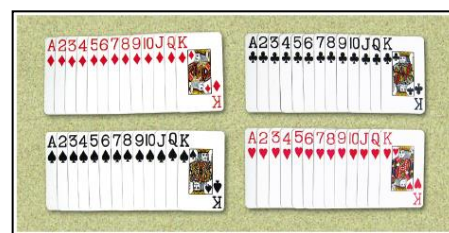
**Solução.** O triângulo ABD é retângulo isósceles, pois AB é diâmetro. Assim  $x + y = 4$ . Os arcos AE e BF são congruentes e limitados por ângulos de  $45^\circ$ . O arco EF, limitado pelo ângulo de  $90^\circ$ .

$$\begin{cases} \text{i)} \begin{cases} x = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \end{cases} \Rightarrow \text{Arco}(BF) = \text{Arco}(AE) = 4 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi \\ \text{ii)} \begin{cases} y = 4 - x = 4 - 2\sqrt{2} = 2(2 - \sqrt{2}) \\ 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \end{cases} \Rightarrow \text{Arco}(EF) = 2(2 - \sqrt{2}) \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) = (2 - \sqrt{2})\pi = 2\pi - \sqrt{2}\pi \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{Arco}(AEFB) = \pi + \pi + 2\pi - \sqrt{2}\pi = 4\pi - \sqrt{2}\pi = \pi(4 - \sqrt{2}) \text{ cm}$$

9. (UERJ) Os baralhos comuns são compostos de 52 cartas divididas em quatro naipes, denominados copas, espadas, paus e ouros, com treze cartas distintas de cada um deles. Observe a figura que mostra um desses baralhos, no qual as cartas representadas pelas letras A, J, Q e K são denominadas, respectivamente, ás, valete, dama e rei. Uma criança rasgou algumas cartas desse baralho, e as  $n$  cartas restantes, não rasgadas, foram guardadas em uma caixa. A tabela ao lado apresenta as probabilidades de retirar-se dessa caixa, ao acaso, as seguintes cartas. Calcule o valor de  $n$ .

**Solução.** Como há rei de copas em um baralho, esta carta é a interseção do conjunto das cartas que são reis e do conjunto de copas. Temos:

$$\begin{cases} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(\text{um rei ou copas}) = 0,3 = \frac{3}{10} \\ P(\text{um rei}) = 0,075 = \frac{75}{1000} = \frac{3}{40} \Rightarrow P(\text{um rei e copas}) = \frac{3}{40} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} \Rightarrow \\ P(\text{uma copas}) = 0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow P(\text{um rei e copas}) = \frac{3 + 10 - 12}{40} = \frac{1}{40} \Rightarrow n = 40 \end{cases}$$



carta	probabilidade
um rei	0,075
uma carta de copas	0,25
uma carta de copas ou rei	0,3

10. (UERJ) Considere o teorema e os dados a seguir para a solução desta questão.

Se  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\alpha + \beta$  são três ângulos agudos diferentes de  $\frac{\pi}{2} + k \in \mathbb{Z}$ , então  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - (\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}\beta)}$ .

$\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  e  $\underline{c}$  são três ângulos agudos, sendo  $\operatorname{tgb} = 2$  e  $\operatorname{tg}(a + b + c) = \frac{4}{5}$ . Calcule  $\operatorname{tg}(a - b + c)$ .

**Solução. Considere  $(a + c) = \alpha$ . Temos:**

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \begin{cases} \operatorname{tg}(a + b + c) = \frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha + b) = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tgb}}{1 - (\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tgb})} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}\alpha + 2}{1 - 2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5\operatorname{tg}\alpha + 10 = 4 - 8\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \\ \operatorname{tgb} = 2 \end{cases} \\ & \Rightarrow 13\operatorname{tg}\alpha = -6 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac{6}{13} \\ \text{ii)} \quad & \begin{cases} \operatorname{tg}(a - b + c) = \operatorname{tg}[\alpha + (-b)] = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(-b)}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(-b)} \Rightarrow \operatorname{tg}(a - b + c) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tgb}}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tgb}} = \frac{-\frac{6}{13} - 2}{1 + 2 \cdot \left(-\frac{6}{13}\right)} \Rightarrow \\ \operatorname{tgb} = 2 \end{cases} \\ & \Rightarrow \operatorname{tg}(a - b + c) = \frac{-6 - 26}{13} = \frac{-32}{13} = \frac{-32}{13} = \frac{-32}{13} \cdot \frac{13}{13} = \frac{-32 \cdot 13}{13} = -32 \end{aligned}$$



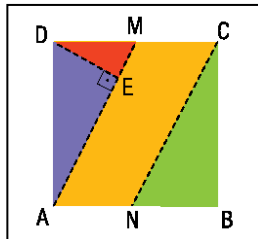
**Exame Discursivo - 2010**

1) Duas empresas, A e B, farão doações mensais a uma creche. A tabela abaixo mostra os valores, em reais, dos depósitos iniciais, a serem realizados nos cinco primeiros meses de 2010.

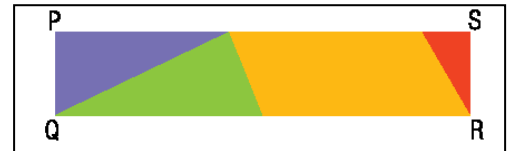
Empresas	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maió
A	12.000,00	11.400,00	10.800,00	10.200,00	9.600,00
B	300,00	600,00	900,00	1.200,00	1.500,00

A diferença entre os valores depositados pelas empresas entre dois meses subsequentes será mantida constante ao longo de um determinado período. Determine o mês e o ano desse período em que o valor mensal do depósito da empresa A será igual ao da empresa B.

2) Observe a figura abaixo, que representa um quadrado ABCD, de papel, no qual M e N são os pontos médios de dois de seus lados. Esse quadrado foi dividido em quatro partes para formar um jogo.



O jogo consiste em montar, com todas essas partes, um retângulo cuja base seja maior que a altura. O retângulo PQRS, mostrado a seguir, resolve o problema proposto no jogo.



Calcule a razão  $\frac{PS}{PQ}$ .

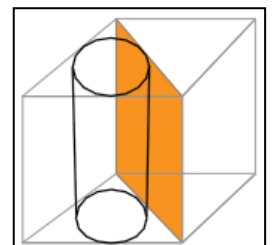
3) Um cofre eletrônico possui um painel com dez teclas numéricas e pode ser aberto por meio da digitação, em qualquer ordem, de três teclas distintas dentre seis habilitadas previamente pelo fabricante. Considere  $n$  o número máximo de conjuntos distintos de três teclas que abrem o cofre. Na figura em destaque, as teclas **envolvidas (azuis)** representam as habilitadas previamente.



Se o fabricante reduzisse para cinco o número de teclas habilitadas, haveria entre elas um total de  $m$  conjuntos distintos de três teclas distintas para abrir o cofre. Calcule o valor de  $n - m$ .

4) Uma criança guarda moedas de **R\$1,00** e de **R\$0,50** em duas caixas, uma verde e outra amarela. Na caixa amarela, há, exatamente, 12 moedas de **R\$1,00** e 15 moedas de **R\$0,50**. Admita que, após a transferência de  $n$  moedas de **R\$1,00** da caixa verde para a amarela, a probabilidade de se retirar ao acaso uma moeda de **R\$1,00** da caixa amarela seja igual a **50%**. Calcule o valor de  $n$ .

5) Uma caixa cúbica foi dividida em duas partes por um plano que contém duas diagonais de faces opostas da caixa. Uma das partes acomoda, sem folga, uma lata com a forma de um cilindro circular reto, conforme ilustrado. Desprezando as espessuras dos materiais utilizados na lata, na caixa e na divisória, calcule a razão entre o volume do cilindro e o da caixa.

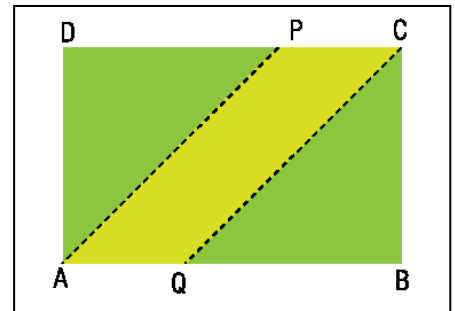


6) Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais positivos e  $A$ ,  $G$  e  $H$ , respectivamente, as médias aritmética, geométrica e harmônica desses números. Admita de  $a > b$  e que a sequência  $(A, G, H)$  seja uma progressão geométrica de razão  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Determine  $\frac{a}{b}$ .

7) Um terreno retangular tem 800m de perímetro e será dividido pelos segmentos  $PA$  e  $CQ$  em três partes, como mostra a figura.

Admita que os segmentos de reta  $PA$  e  $CQ$  estão contidos nas bissetrizes de dois ângulos retos do terreno e que a área do paralelogramo  $PAQC$  tem medida  $S$ .

Determine o maior valor, em  $m^2$ , que  $S$  pode assumir.



8) Ao final de um campeonato de futebol, foram premiados todos os jogadores que marcaram 13, 14 ou 15 gols cada um. O número total de gols realizados pelos premiados foi igual a 125 e, desses atletas, apenas cinco marcaram mais de 13 gols. Calcule o número de atletas que fizeram 15 gols.

9) Suponha que  $x$  e  $y$  são números reais positivos que apresentam logaritmos com bases diferentes, conforme as igualdades a seguir:

$$\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x + y)$$

Calcule a razão  $\frac{y}{x}$ .

10) As seis soluções da equação  $z^6 + z^3 + 1 = 0$  são números complexos que possuem módulos iguais e argumentos distintos. O argumento  $\theta$ , em radianos, de uma dessas soluções pertence ao intervalo  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ .

Determine a medida de  $\theta$ .



**Exame Discursivo - 2010 - GABARITO**

1) Duas empresas, A e B, farão doações mensais a uma creche. A tabela abaixo mostra os valores, em reais, dos depósitos iniciais, a serem realizados nos cinco primeiros meses de 2010.

Empresas	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maió
A	12.000,00	11.400,00	10.800,00	10.200,00	9.600,00
B	300,00	600,00	900,00	1.200,00	1.500,00

A diferença entre os valores depositados pelas empresas entre dois meses subsequentes será mantida constante ao longo de um determinado período. Determine o mês e o ano desse período em que o valor mensal do depósito da empresa A será igual ao da empresa B.

**Solução.** Os depósitos da empresa A formam uma progressão aritmética razão  $(11400 - 12000) = -600$ . Os depósitos da empresa B formam uma progressão aritmética crescente de razão  $(600 - 300) = 300$ . Escrevendo as expressões do termo geral de cada uma e igualando, temos:

$$\begin{cases} A: a_n = 12000 + (n-1) \cdot (-600) \\ B: b_n = 300 + (n-1) \cdot (300) \end{cases} \Rightarrow 12000 - 600n + 600 = 300 + 300n - 300 \Rightarrow 12600 = 900n \Rightarrow n = \frac{12600}{900} = 14$$

**Iniciando em janeiro de 2010 os depósitos serão iguais 14 meses depois. Isto é, em fevereiro de 2011.**

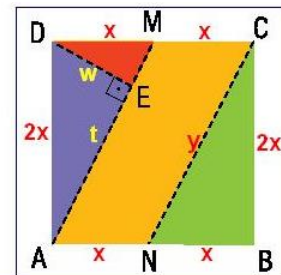
2) Observe a figura abaixo, que representa um quadrado ABCD, de papel, no qual M e N são os pontos médios de dois de seus lados. Esse quadrado foi dividido em quatro partes para formar um jogo. O jogo consiste em montar, com todas essas partes, um retângulo cuja base seja maior que a altura. O retângulo

PQRS, mostrado a seguir, resolve o problema proposto no jogo. Calcule a razão  $\frac{PS}{PQ}$ .

**Solução.** Observando as medidas correspondentes no quadrado e no retângulo formado, temos:

$$\begin{cases} y^2 = x^2 + (2x)^2 \Rightarrow y = \sqrt{5x^2} = x\sqrt{5} \\ i) \ t + z = y \Rightarrow 2x^2 = w \cdot y \Rightarrow w = \frac{2x^2}{y} \\ (\triangle ADM): \frac{(2x) \cdot (x)}{2} = \frac{(w) \cdot (t+z)}{2} \\ \Rightarrow w = \frac{2x^2}{x\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5} \cdot x}{5} \end{cases}$$

$$ii) \ \frac{PS}{PQ} = \frac{2y}{w} = \frac{2\sqrt{5} \cdot x}{\frac{2\sqrt{5} \cdot x}{5}} = 2\sqrt{5} \cdot x \cdot \frac{5}{2\sqrt{5} \cdot x} = 5$$



3) Um cofre eletrônico possui um painel com dez teclas numéricas e pode ser aberto por meio da digitação, em qualquer ordem, de três teclas distintas dentre seis habilidades previamente pelo fabricante. Considere  $n$  o número máximo de conjuntos distintos de três teclas que abrem o cofre. Na figura em destaque, as teclas **envolvidas (azuis)** representam as habilidades previamente. Se o fabricante reduzisse para cinco o número de teclas habilitadas, haveria entre elas um total de  $m$  conjuntos distintos de três teclas distintas para abrir o cofre. Calcule o valor de  $n - m$ .



**Solução. Escolhendo um conjunto de três teclas dentre as seis disponíveis, temos:**

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!.3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!.3!} = 20$$

**Escolhendo um conjunto de três teclas dentre as cinco disponíveis, temos:**

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!.2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{3!.2!} = 10$$

**Pelas informações,  $n = 20$  e  $m = 10$ . Logo,  $n - m = 20 - 10 = 10$ .**

4) Uma criança guarda moedas de **R\$1,00** e de **R\$0,50** em duas caixas, uma verde e outra amarela. Na caixa amarela, há, exatamente, 12 moedas de **R\$1,00** e 15 moedas de **R\$0,50**. Admita que, após a transferência de  $n$  moedas de **R\$1,00** da caixa verde para a amarela, a probabilidade de se retirar ao acaso uma moeda de **R\$1,00** da caixa amarela seja igual a **50%**. Calcule o valor de  $n$ .

**Solução. A caixa amarela inicialmente possui 27 moedas. Após a transferência de  $n$  moedas de R\$1,00 o total de moedas é  $(27 + n)$ , sendo que  $(12 + n)$  moedas são de R\$1,00. Estabelecendo a condição**

**pedida, temos:**

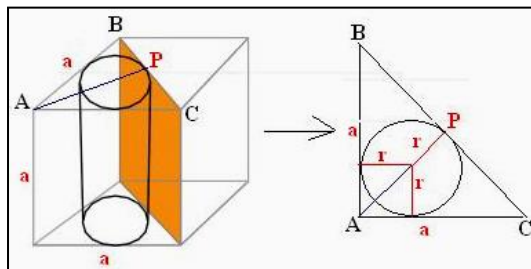
$$\begin{cases} P(R\$1,00) = \frac{12+n}{27+n} \\ P(R\$1,00) = 50\% = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{12+n}{27+n} = \frac{1}{2} \Rightarrow 24+2n = 27+n \Rightarrow 2n-n = 27-24 \Rightarrow n = 3$$

5) Uma caixa cúbica foi dividida em duas partes por um plano que contém duas diagonais de faces opostas da caixa. Uma das partes acomoda, sem folga, uma lata com a forma de um cilindro circular reto, conforme ilustrado. Desprezando as espessuras dos materiais utilizados na lata, na caixa e na divisória, calcule a razão entre o volume do cilindro e o da caixa.

**Solução. Observando a face superior do cubo e os pontos destacados na 2ª figura, temos que AP é a metade da diagonal da face quadrada.**

$$\begin{cases} AP = \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ AP = r + r\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2} = r(1+\sqrt{2}) \Rightarrow \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})} \Rightarrow \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{2}-2}{2(1-2)} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{V(\text{cilindro})}{V(\text{cubo})} = \frac{\pi r^2 \cdot a}{a^3} = \frac{\pi r^2 \cdot a}{a^3} = \frac{\pi r^2}{a^2} = \pi \left( \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right)^2$$



6) Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais positivos e A, G e H, respectivamente, as médias aritmética, geométrica e harmônica desses números. Admita de  $a > b$  e que a sequência (A, G, H) seja uma progressão geométrica de

razão  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Determine  $\frac{a}{b}$ .

**Solução. Escrevendo as condições informadas, temos:**

$$\begin{cases} A = \frac{a+b}{2} \\ G = \sqrt{AH} \\ H = A \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3A}{4} \\ G = \sqrt{ab} \end{cases} \Rightarrow G = \sqrt{A \cdot \frac{3A}{4}} = \sqrt{\frac{3A^2}{4}} = \frac{\sqrt{3A^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}A}{2} = \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{3A^2}{4} = ab \Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 4ab \Rightarrow \frac{3(a^2+2ab+b^2)}{4} = 4ab \Rightarrow 3a^2+6ab+3b^2 = 16ab \Rightarrow 3a^2-10ab+3b^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-(-10b) \pm \sqrt{(-10b)^2 - 4(3)(3b^2)}}{2(3)} = \frac{10b \pm \sqrt{100b^2 - 36b^2}}{6}$$

$$a = \frac{10b \pm \sqrt{64b^2}}{6} = \frac{10b \pm 8b}{6} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{10b+8b}{6} = \frac{18b}{6} = 3b \\ a = \frac{10b-8b}{6} = \frac{2b}{6} = \frac{b}{3} \Rightarrow a < b \rightarrow \text{incompatível: } a > b \end{cases}$$

**A razão pedida é:**  $\frac{a}{b} = \frac{3b}{b} = 3$ .

7) Um terreno retangular tem 800m de perímetro e será dividido pelos segmentos PA e CQ em três partes, como mostra a figura. Admita que os segmentos de reta PA e CQ estão contidos nas bissetrizes de dois ângulos retos do terreno e que a área do paralelogramo PAQC tem medida **S**. Determine o maior valor, em  $m^2$ , que **S** pode assumir.

**Solução.** O perímetro vale 800m. Considerando as dimensões do terreno como  $x$  e  $y$ , temos que:

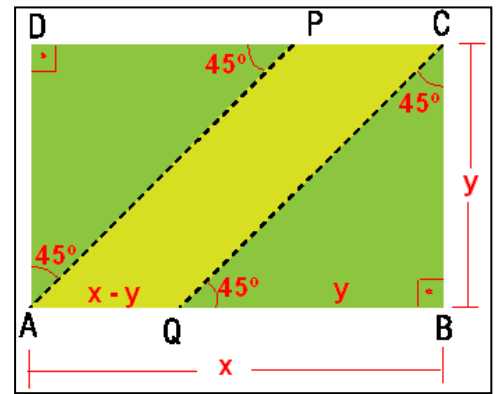
i)  $2x + 2y = 800 \Rightarrow x + y = 400 \Rightarrow x = 400 - y$ .

ii) Área  $S = (x - y) \cdot y = xy - y^2$ .

A expressão da área **S** é uma função quadrática. Substituindo (i) em (ii) e calculando o valor máximo, temos:

$$S(y) = -y^2 + (400 - y) \cdot y = -2y^2 + 400y$$

$$S_{\text{Max}} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(400)^2 - 4(-2) \cdot (0)}{4(-2)} = -\frac{160000}{-8} = 20000 m^2$$



8) Ao final de um campeonato de futebol, foram premiados todos os jogadores que marcaram 13, 14 ou 15 gols cada um. O número total de gols realizados pelos premiados foi igual a 125 e, desses atletas, apenas cinco marcaram mais de 13 gols. Calcule o número de atletas que fizeram 15 gols.

**Solução.** Considerando  $x$ ,  $y$  e  $z$  o número de jogadores que marcaram, respectivamente, 13, 14 e 15 gols, temos as equações:  $y + z = 5$  e  $13x + 14y + 15z = 125$ . Como o número de jogadores é um inteiro positivo os valores com soma 5 serão: (0,5), (5,0), (1,4); (4,1), (2,3) e (3,2). A diferença  $125 - (14y + 15z)$  deve ser um múltiplo inteiro de 13. Testando na tabela, temos:

y	z	13x
0	5	$125 - [14 \cdot (0) + 15 \cdot (5)] = 125 - 75 = 50$
5	0	$125 - [14 \cdot (5) + 15 \cdot (0)] = 125 - 70 = 55$
1	4	$125 - [14 \cdot (1) + 15 \cdot (4)] = 125 - 74 = 51$
4	1	$125 - [14 \cdot (4) + 15 \cdot (1)] = 125 - 71 = 54$
2	3	$125 - [14 \cdot (2) + 15 \cdot (3)] = 125 - 73 = 52$
3	2	$125 - [14 \cdot (3) + 15 \cdot (2)] = 125 - 72 = 53$

Somente o 52 é múltiplo de 13 ( $13 \times 4 = 52$ ). Logo  $y = 2$  e  $z = 3$ . Então 3 jogadores marcaram 15 gols.

9) Suponha que  $x$  e  $y$  são números reais positivos que apresentam logaritmos com bases diferentes, conforme as igualdades a seguir:

$$\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x + y)$$

Calcule a razão  $\frac{y}{x}$ .

**Solução.** Igualando os termos a uma constante  $k$  e escrevendo as respectivas potências, temos:

$$\begin{cases} \log_9 x = k \Rightarrow x = 9^k \\ \log_6 y = k \Rightarrow y = 6^k \\ \log_4 (x + y) = k \Rightarrow x + y = 4^k \end{cases} \Rightarrow 9^k + 6^k = 4^k \rightarrow (\div 9^k) \Rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^k - \left(\frac{6}{9}\right)^k - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^k - \left(\frac{2}{3}\right)^k - 1 = 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} - \left(\frac{2}{3}\right)^k - 1 = 0 \rightarrow \left[z = \left(\frac{2}{3}\right)^k \Rightarrow z^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2k}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^2 - z - 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{6^k}{9^k} = \left(\frac{6}{9}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

10) As seis soluções da equação  $z^6 + z^3 + 1 = 0$  são números complexos que possuem módulos iguais e argumentos distintos. O argumento  $\theta$ , em radianos, de uma dessas soluções pertence ao intervalo  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ .

Determine a medida de  $\theta$ .

**Solução.** Substituindo  $y = z^3$ , na equação acima, temos:  $y^2 + y + 1 = 0$ . Esta solução será resolvida pela

fórmula da equação do 2º grau:

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ y_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

São duas raízes complexas e os valores de  $z$  são:

i) Para  $y_1$ .

$$y_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} |y_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \\ \cos\theta = \frac{-1/2}{1} = -\frac{1}{2} \\ \text{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow y_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\text{sen}\frac{2\pi}{3}$$

$$z = (y_1)^{\frac{1}{3}} = \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \cos\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} z_0 = \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{9}\right) \\ z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) + i\text{sen}\left(\frac{8\pi}{9}\right) \\ z_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{14\pi}{9}\right) + i\text{sen}\left(\frac{14\pi}{9}\right) \end{cases}$$

ii) Para  $y_2$ .

$$y_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} |y_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \\ \cos\theta = \frac{-1/2}{1} = -\frac{1}{2} \\ \text{sen}\theta = \frac{-\sqrt{3}/2}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow y_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\text{sen}\frac{4\pi}{3}$$

$$z = (y_2)^{\frac{1}{3}} = \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{4\pi}{3} + \frac{4k\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{4\pi}{3} + \frac{4k\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \cos\left(\frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} z_3 = \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + i\text{sen}\left(\frac{4\pi}{9}\right) \\ z_4 = \cos\left(\frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{10\pi}{9}\right) + i\text{sen}\left(\frac{10\pi}{9}\right) \\ z_5 = \cos\left(\frac{4\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{4\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{16\pi}{9}\right) + i\text{sen}\left(\frac{16\pi}{9}\right) \end{cases}$$

Observando as soluções, a que apresenta o argumento  $\theta$  no 2º quadrante é:  $\theta = \arg(z_1) = \frac{8\pi}{9}$ .



**Exame Discursivo - 2011**

1) Um supermercado realiza uma promoção com o objetivo de diminuir o consumo de sacolas plásticas: o cliente que não utilizar as sacolas disponíveis no mercado terá um desconto de R\$0,03 a cada cinco itens registrados no caixa. Um participante dessa promoção comprou 215 itens e pagou R\$155,00. Determine o valor, em reais, que esse cliente pagaria se fizesse as mesmas compras e não participasse da promoção.

2) Um trem transportava, em um de seus vagões, um número inicial  $n$  de passageiros. Ao parar em uma estação, 20% desses passageiros desembarcaram. Em seguida, entraram nesse vagão 20% da quantidade de passageiros que nele permaneceu após o desembarque. Dessa forma, o número final de passageiros no vagão corresponde a 120. Determine o valor de  $n$ .

3) Considere a equação:  $(\log_2 x)^2 - \log_{\sqrt[3]{2}} x = 0$  com  $x > 0$ .

Um aluno apresentou o seguinte desenvolvimento para a solução dessa equação:

O conjunto-solução encontrado pelo aluno está incompleto.

Resolva a equação e determine corretamente o seu conjunto-solução.

$$\begin{aligned} (\log_2 x)^2 &= \log_{\sqrt[3]{2}} x \\ (\log_2 x)^2 &= 3(\log_2 x) \\ (\log_2 x) &= 3 \\ x &= 2^3 \\ x &= 8 \\ S &= \{8\} \end{aligned}$$

4) Um jogo com dois participantes, A e B, obedece às seguintes regras:

- antes de A jogar uma moeda para o alto, B deve adivinhar a face que, ao cair, ficará voltada para cima, dizendo "cara" ou "coroa";
- quando B errar pela primeira vez, deverá escrever, em uma folha de papel, a sigla **UERJ** uma única vez; ao errar pela segunda vez, escreverá UERJ**UERJ**, e assim sucessivamente;
- em seu  $n$ ésimo erro, B escreverá  $n$  vezes a mesma sigla.

Veja o quadro que ilustra o jogo:

O jogo terminará quando o número total de letras escritas por B, do primeiro ao  $n$ ésimo erro, for igual a dez vezes o número de letras escritas, considerando apenas o  $n$ ésimo erro.

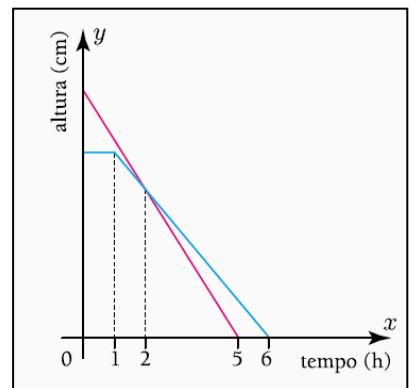
Determine o número total de letras que foram escritas até o final do jogo.

Ordem de erro	Letras escritas
1º	UERJ
2º	UERJ <b>UERJ</b>
3º	UERJ <b>UERJ</b> UERJ
4º	UERJ <b>UERJ</b> UERJ <b>UERJ</b>
.	.
.	.
.	.
$n$ º	UERJ <b>UERJ</b> UERJ <b>UERJ</b> ... UERJ

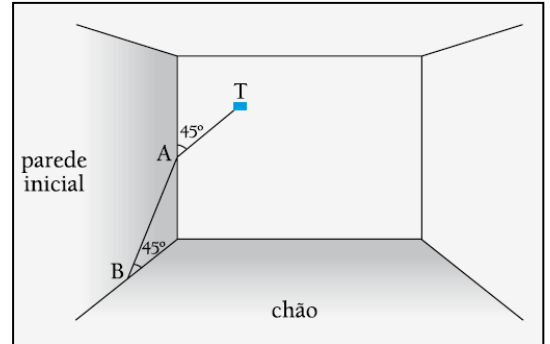
5) Em um determinado dia, duas velas foram acesas: a vela A às 15 horas e a vela B, 2cm menor, às 16 horas. Às 17 horas desse mesmo dia, ambas tinham a mesma altura.

Observe o gráfico que representa as alturas de cada uma das velas em função do tempo a partir do qual a vela A foi acesa.

Calcule a altura de cada uma das velas antes de serem acesas.



6) Uma sala tem a forma de um paralelepípedo retângulo. Para levar fios a uma tomada T, um cano foi instalado tangente a duas paredes dessa sala. A primeira parte reta do cano, BA, faz um ângulo de  $45^\circ$  com o chão e a segunda parte, AT, congruente com a primeira, forma um ângulo de  $45^\circ$  com a parede inicial.



Observe a ilustração:

Desprezando a espessura do cano, calcule o ângulo  $\widehat{BAT}$ , formado por suas duas partes.

7) Para a realização de uma partida de futebol são necessários três árbitros: um juiz principal, que apita o jogo, e seus dois auxiliares, que ficam nas laterais. Suponha que esse trio de arbitragem seja escolhido aleatoriamente em um grupo composto de somente dez árbitros, sendo X um deles. Após essa escolha, um segundo sorteio aleatório é feito entre os três para determinar qual deles será o juiz principal. Calcule a probabilidade de X ser o juiz principal.

8) Considere a matriz  $A_{3 \times 3}$  mostrada:

Cada elemento desta matriz é expresso pela seguinte relação:

$$a_{ij} = 2 \times (\sin \theta_i) \times (\cos \theta_j), \forall i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Nessa relação, os arcos  $\theta_1, \theta_2$  e  $\theta_3$  são positivos e menores que  $\frac{\pi}{3}$  radianos.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & 1 \\ a_{31} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

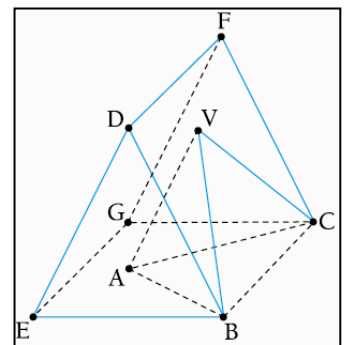
Calcule o valor numérico do determinante da matriz A.

9) Um artesão retirou, de uma pedra com a forma inicial de um prisma triangular reto de base EBD, um tetraedro regular VABC. Observe a figura abaixo:

Considere os seguintes dados:

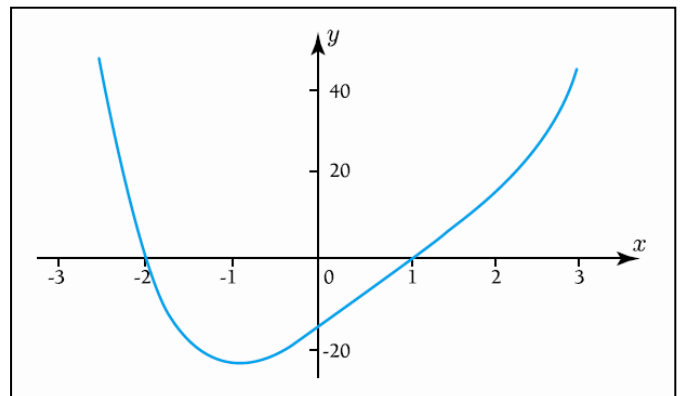
- os vértices A e V pertencem a duas faces laterais do prisma;
- $BD = BE = BC = 1$  m.

Determine o volume inicial da pedra.



10) O gráfico mostrado representa uma função polinomial P de variável real, que possui duas raízes inteiras e é definida por:  $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 16x + m$ .

Determine o valor da constante representada por m e as quatro raízes desse polinômio.





**Exame Discursivo - 2011 - GABARITO**

1) Um supermercado realiza uma promoção com o objetivo de diminuir o consumo de sacolas plásticas: o cliente que não utilizar as sacolas disponíveis no mercado terá um desconto de R\$0,03 a cada cinco itens registrados no caixa. Um participante dessa promoção comprou 215 itens e pagou R\$155,00. Determine o valor, em reais, que esse cliente pagaria se fizesse as mesmas compras e não participasse da promoção.

**Solução. De acordo com a promoção em 215 itens há  $215 \div 5 = 43$  grupos de cinco itens. Logo ganhou um desconto  $R\$0,03 \times 43 = R\$1,29$ . Sem os descontos pagaria  $R\$155,00 + R\$1,29 = R\$156,29$ .**

2) Um trem transportava, em um de seus vagões, um número inicial  $n$  de passageiros. Ao parar em uma estação, 20% desses passageiros desembarcaram. Em seguida, entraram nesse vagão 20% da quantidade de passageiros que nele permaneceu após o desembarque. Dessa forma, o número final de passageiros no vagão corresponde a 120. Determine o valor de  $n$ .

**Solução. Se inicialmente havia  $n$  passageiros, com a parada ficaram somente  $80\% \cdot n = 0,8n$  passageiros no interior do trem. Entraram  $20\% \cdot (0,8n)$  passageiros. Logo a quantidade final foi a soma de  $0,16n + 0,8n = 0,96n$  passageiros. Esse número equivale a 120. Logo,  $0,96n = 120 \Rightarrow n = 120 \div 0,96 = 125$ .**

3) Considere a equação:  $(\log_2 x)^2 - \log_{\sqrt[3]{2}} x = 0$  com  $x > 0$ .

Um aluno apresentou o seguinte desenvolvimento para a solução dessa equação:

O conjunto-solução encontrado pelo aluno está incompleto.

Resolva a equação e determine corretamente o seu conjunto-solução.

$$\begin{aligned} (\log_2 x)^2 &= \log_{\sqrt[3]{2}} x \\ (\log_2 x)^2 &= 3(\log_2 x) \\ (\log_2 x) &= 3 \\ x &= 2^3 \\ x &= 8 \\ S &= \{8\} \end{aligned}$$

**Solução. O erro do aluno foi em cancelar o termo  $(\log_2 x)$  nos membros. Essa operação só é possível se for garantido que é diferente de zero. O correto seria:**

$$\begin{aligned} \text{i) } \log_{\sqrt[3]{2}} x = z &\Rightarrow x = (\sqrt[3]{2})^z = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^z = 2^{\frac{z}{3}} \Rightarrow \frac{z}{3} = \log_2 x \Rightarrow z = 3\log_2 x \Rightarrow \log_{\sqrt[3]{2}} x = 3\log_2 x \\ \text{ii) } (\log_2 x)^2 - \log_{\sqrt[3]{2}} x = 0 &\Rightarrow (\log_2 x)^2 - 3\log_2 x = 0 \Rightarrow \log_2 x(\log_2 x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = 0 \\ \log_2 x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 2^0 = 1 \\ \log_2 x = 3 \Rightarrow x = 2^3 = 8 \end{cases} &\Rightarrow S = \{1, 8\} \end{aligned}$$

4) Um jogo com dois participantes, A e B, obedece às seguintes regras:

- antes de A jogar uma moeda para o alto, B deve adivinhar a face que, ao cair, ficará voltada para cima, dizendo "cara" ou "coroa";
- quando B errar pela primeira vez, deverá escrever, em uma folha de papel, a sigla **UERJ** uma única vez; ao errar pela segunda vez, escreverá UERJUERJ, e assim sucessivamente;
- em seu enésimo erro, B escreverá  $n$  vezes a mesma sigla.

Veja o quadro que ilustra o jogo:

Ordem de erro	Letras escritas
1ª	UERJ
2ª	UERJUERJ
3ª	UERJUERJUERJ
4ª	UERJUERJUERJUERJ
⋮	⋮
⋮	⋮
⋮	⋮
$n$ ª	UERJUERJUERJUERJ... UERJ

O jogo terminará quando o número total de letras escritas por B, do primeiro ao enésimo erro, for igual a dez vezes o número de letras escritas, considerando apenas o enésimo erro. Determine o número total de letras que foram escritas até o final do jogo.

**Solução.** Como são escritas 4 letras a cada erro, forma-se uma progressão aritmética de razão 4, iniciando com 4 (UERJ).

i) Número de letras escritas no enésimo erro:  $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 4 = 4 + 4n - 4 = 4n$ .

ii) Total de letras escritas do 1º ao enésimo erro:  $S_n = \frac{(4 + 4n) \cdot n}{2}$ .

iii) Término do jogo.  $S_n = 10 \cdot a_n$ :

$$\frac{(4 + 4n) \cdot n}{2} = 10 \cdot (4n) \Rightarrow 4n + 4n^2 = 80n \Rightarrow 4n^2 - 76n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4n(n - 19) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4n = 0 \Rightarrow n = 0 \rightarrow \text{incompatível} \\ n - 19 = 0 \Rightarrow n = 19 \end{cases}$$

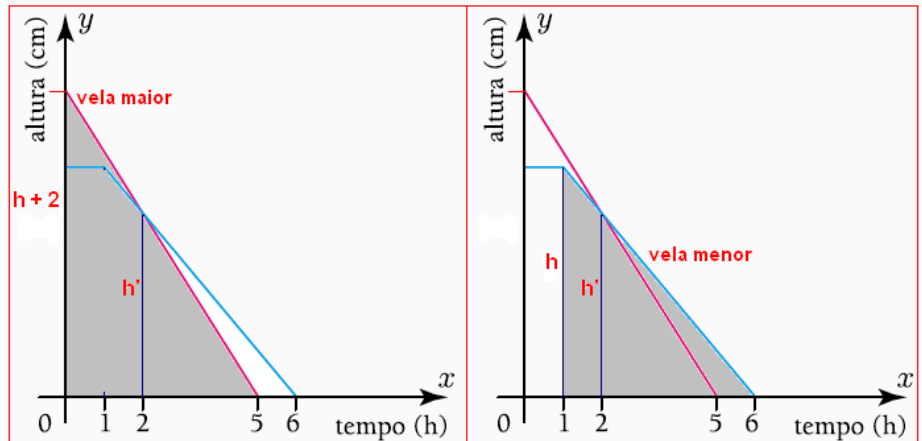
Foram escritas até o final do jogo:  $S_{19} = \frac{(4 + 4 \cdot 19) \cdot 19}{2} = \frac{(80) \cdot 19}{2} = (40) \cdot (19) = 760$  letras.

5) Em um determinado dia, duas velas foram acesas: a vela A às 15 horas e a vela B, 2cm menor, às 16 horas. Às 17 horas desse mesmo dia, ambas tinham a mesma altura.

Observe o gráfico que representa as alturas de cada uma das velas em função do tempo a partir do qual a vela A foi acesa. Calcule a altura de cada uma das velas antes de serem acesas.

**Solução 1.** Considerando a altura da vela menor como  $h$ , a vela maior terá altura  $h + 2$ .

Considerando ainda a altura  $h'$  relativa à intersecção dos gráficos, estabelecemos uma semelhança entre triângulos para cada caso conforme a figura.



**Temos:**

$$\begin{cases} \text{Vela(maior)}: \frac{h+2}{5} = \frac{h'}{3} \Rightarrow 3h+6 = 5h' \Rightarrow 5h'-3h = 6 \\ \text{Vela(menor)}: \frac{h}{5} = \frac{h'}{4} \Rightarrow 5h' = 4h \Rightarrow 4h - 3h = 6 \Rightarrow h = 6 \end{cases}$$

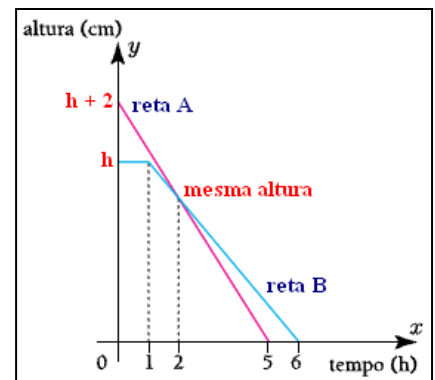
Vela menor mede 6cm e vela maior mede 8cm.

**Solução 2.** Solução. Encontrando as equações das retas A e B e observando que no tempo  $t = 2$  as alturas são iguais, temos:

i) reta A:  $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & h+2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & h+2 & 10 \\ 5 & 0 & 15 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow hx + 2x + 5y - 5h - 10 = 0 \Rightarrow y = -\frac{(h+2)}{5}x + h + 2$$

ii) reta B:  $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & h & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & h & 11 \\ 6 & 0 & 16 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow hx + 6y - 6h - y = 0 \Rightarrow y = -\frac{h}{5}x + \frac{6h}{5}$



Encontrando o valor de  $h$  para  $t = 2$ , temos:

$$\text{iii) } x = 2 \Rightarrow \text{mesma altura: } \begin{cases} y = -\frac{(h+2)}{5}(2) + h + 2 \\ y = -\frac{h}{5}(2) + \frac{6h}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{2(h+2)}{5} + h + 2 = -\frac{2h}{5} + \frac{6h}{5} \Rightarrow -2h - 4 + 5h + 10 = -2h + 6h \Rightarrow 3h - 4h = -10 + 4 \Rightarrow -h = -6 \Rightarrow \begin{cases} \text{Vela B: } h = 6\text{cm} \\ \text{Vela A: } h = 6 + 2 = 8\text{cm} \end{cases}$$

6) Uma sala tem a forma de um paralelepípedo retângulo. Para levar fios a uma tomada T, um cano foi instalado tangente a duas paredes dessa sala. A primeira parte reta do cano, BA, faz um ângulo de  $45^\circ$  com o chão e a segunda parte, AT, congruente com a primeira, forma um ângulo de  $45^\circ$  com a parede inicial. Uma sala tem a forma de um paralelepípedo retângulo. Para levar fios a uma tomada T, um cano foi instalado tangente a duas paredes dessa sala. A primeira parte reta do cano, BA, faz um ângulo de  $45^\circ$  com o chão e a segunda parte, AT, congruente com a primeira, forma um ângulo de  $45^\circ$  com a parede inicial.

Observe a ilustração:

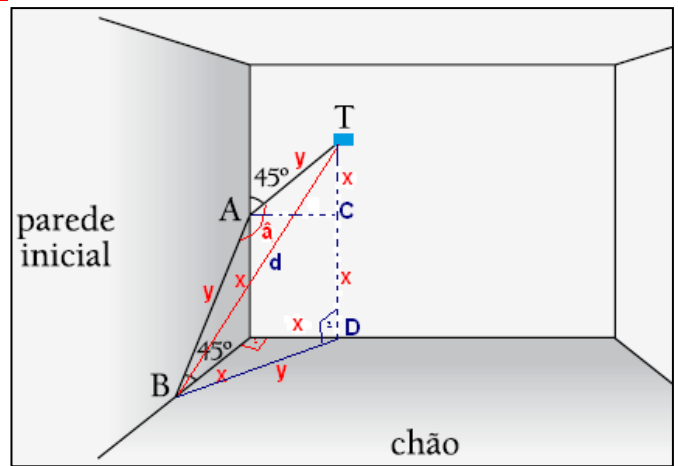
Desprezando a espessura do cano, calcule o ângulo  $\hat{B}\hat{A}T$ , formado por suas duas partes.

**Solução.** O ângulo pedido está representado por  $\hat{a}$  será calculado utilizando a Lei dos Cossenos. Observando as medidas indicadas, temos:

$$\text{i) } x^2 + x^2 = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$$

$$\text{ii) T(TBD): } d^2 = (2x)^2 + y^2 \Rightarrow d = \sqrt{4x^2 + 2x^2} \Rightarrow d = x\sqrt{6}$$

$$\text{ii) T(ABT): } d^2 = y^2 + y^2 - 2(y)(y) \cdot \cos \hat{a} \Rightarrow 6x^2 = 2x^2 + 2x^2 - 2(2x^2) \cos \hat{a} \Rightarrow 2x^2 = -4x^2 \cos \hat{a} \Rightarrow \cos \hat{a} = -\frac{2x^2}{4x^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{a} = \hat{B}\hat{A}T = 120^\circ$$



7) Para a realização de uma partida de futebol são necessários três árbitros: um juiz principal, que apita o jogo, e seus dois auxiliares, que ficam nas laterais. Suponha que esse trio de arbitragem seja escolhido aleatoriamente em um grupo composto de somente dez árbitros, sendo X um deles. Após essa escolha, um segundo sorteio aleatório é feito entre os três para determinar qual deles será o juiz principal. Calcule a probabilidade de X ser o juiz principal.

**Solução.** Considere  $P(E1)$  a probabilidade da X ser escolhido em um trio da forma (XJJ). Temos:

$$P(E1) = \frac{C_9^2}{C_{10}^3} = \frac{\frac{9!}{2!7!}}{\frac{10!}{3!7!}} = \frac{9!}{2!7!} \cdot \frac{3!7!}{10!} = \frac{9!}{2!7!} \cdot \frac{3 \cdot 2! \cdot 7!}{10 \cdot 9!} = \frac{3}{10}$$

Uma vez escolhido o trio queremos a probabilidade de X ser o principal, dado que foi escolhido.

**Temos:**  $P(E1 \cap \text{Principal}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$

8) Considere a matriz  $A_{3 \times 3}$  mostrada:

Cada elemento desta matriz é expresso pela seguinte relação:

$$a_{ij} = 2 \times (\text{sen} \theta_i) \times (\text{cos} \theta_j), \forall i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Nessa relação, os arcos  $\theta_1, \theta_2$  e  $\theta_3$  são positivos e menores que  $\frac{\pi}{3}$  radianos.

Calcule o valor numérico do determinante da matriz A.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & 1 \\ a_{31} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Solução.** Observando os elementos  $a_{22}$  e  $a_{33}$ , temos: Calculando os valores dos elementos temos:

$$\begin{cases} a_{22} = 2\text{sen}\theta_2 \cdot \cos\theta_2 = \text{sen}(2\theta_2) \Rightarrow \text{sen}(2\theta_2) = 1 \\ a_{22} = 1 \\ a_{33} = 2\text{sen}\theta_3 \cdot \cos\theta_3 = \text{sen}(2\theta_3) \Rightarrow \text{sen}(2\theta_3) = 1 \\ a_{33} = 1 \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \theta_3 < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta_2 = \theta_3 = 45^\circ$$

Calculando os valores dos elementos  $a_{12}$  e  $a_{13}$ , temos:

$$\begin{cases} a_{12} = 2\text{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \\ a_{13} = 2\text{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_3 = 2\text{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \end{cases} \Rightarrow a_{12} = a_{13}$$

Como a 2ª coluna será igual à 3ª coluna, o determinante é zero.

9) Um artesão retirou, de uma pedra com a forma inicial de um prisma triangular reto de base EBD, um tetraedro regular VABC. Observe a figura abaixo:

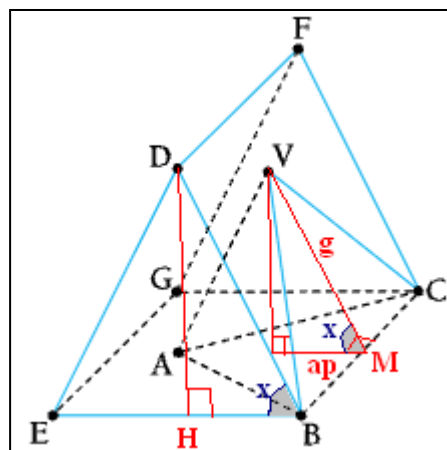
Considere os seguintes dados:

- os vértices A e V pertencem a duas faces laterais do prisma;
- $\mathbf{BD = BE = BC = 1\ m}$ .

Determine o volume inicial da pedra.

**Solução.** Observe as medidas representadas na figura e a fórmula da área da base que será utilizada.

O volume da pedra será calculado pelo produto da base EDB pela altura  $DF = 1\text{ m}$ . O triângulo EDB é isósceles, mas não equilátero. Conhecemos dois lados e o ângulo,  $x$ , formado por eles.



Logo a área será:

$$\begin{cases} A_{EDB} = \frac{(\overline{EB})(\overline{DH})}{2} \Rightarrow A_{EDB} = \frac{(\overline{EB})(\overline{DB})\text{sen}x}{2} \\ \frac{\overline{DH}}{\overline{DB}} = \text{sen}x \end{cases}$$

Observe que o ângulo  $x$  é o mesmo formado pelo apótema da base e o apótema do tetraedro. Como é regular as faces são triângulos equiláteros. Temos:

$$\begin{cases} g = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{(1)\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{ap} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \end{cases} \Rightarrow \cos x = \frac{\text{ap}}{g} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

Aplicando a relação fundamental, temos:

$$\begin{cases} \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \text{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen} x = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Substituindo na fórmula da área e calculando o volume, temos:

$$\begin{cases} A_{EDB} = \frac{(\overline{EB})(\overline{DB})\text{sen}x}{2} = \frac{(1)(1)\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ m}^2 \Rightarrow V = A_{\text{base}} \cdot h = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)(1) = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ m}^3 \\ \text{Altura} = \overline{DF} = 1\text{ m} \end{cases}$$

10) O gráfico mostrado representa uma função polinomial  $P$  de variável real, que possui duas raízes inteiras e é definida por:  $\mathbf{P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 16x + m}$ . Determine o valor da constante representada por  $\underline{m}$  e as quatro raízes desse polinômio.

**Solução.** Como o gráfico passa por  $(1,0)$ , temos que  $1$  é raiz.

Logo,  $P(1) = 0 \Rightarrow 1 - 3 + 2 + 16 + m = 0 \Rightarrow \underline{m = -16}$ .

Outra raiz observada pelo gráfico é  $x = -2$ .

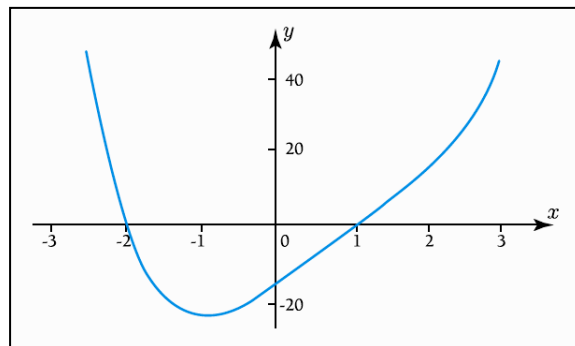
Aplicando Briot-Ruffini duas vezes, temos:

1	1	-3	2	16	-16
-2	1	-2	0	16	0
	1	-4	8	0	

Resolvendo  $x^2 - 4x + 8 = 0$ , vem:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(8)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{4 \pm 4i}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + 2i \\ x_2 = 2 - 2i \end{cases}$$

As raízes são:  $\{-2; 1, 2 - 2i; 2 + 2i\}$ .





**Exame Discursivo - 2012**

1) Para comprar os produtos A e B em uma loja, um cliente dispõe da quantia X, em reais. O preço do produto A corresponde a  $\frac{2}{3}$  de X, e o do produto B corresponde à fração restante. No momento de efetuar o pagamento, uma promoção reduziu em 10% o preço de A. Sabendo que, com o desconto, foram gastos R\$ 350,00 na compra dos produtos A e B, calcule o valor, em reais, que o cliente deixou de gastar.

Utilize as informações a seguir para responder às questões de números 2 e 3.

Na tabela abaixo, estão indicados os preços do rodízio de pizzas de um restaurante.

DIAS DA SEMANA	VALOR UNITÁRIO DO RODÍZIO (R\$)
Segunda-feira, terça-feira, quarta-feira e quinta-feira.	18,50
Sexta-feira, sábado e domingo.	22,00

2) Considere um cliente que foi a esse restaurante todos os dias de uma mesma semana, pagando um rodízio em cada dia.

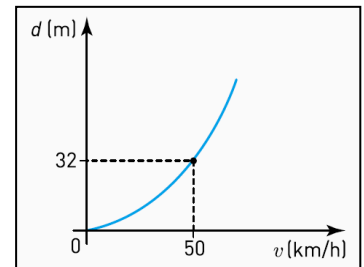
Determine o valor médio que esse cliente pagou, em reais, pelo rodízio nessa semana.

3) Considere agora outro cliente que escolheu aleatoriamente dois dias de uma mesma semana para comer pizzas nesse sistema de rodízio, pagando também um rodízio em cada dia.

Calcule a probabilidade de que o valor total gasto pelo cliente nesses dois dias seja o mínimo possível.

4) Distância de frenagem é aquela percorrida por um carro do instante em que seu freio é acionado até o momento em que ele para. Essa distância é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade que o carro está desenvolvendo no instante em que o freio é acionado.

O gráfico abaixo indica a distância de frenagem  $d$ , em metros, percorrida por um carro, em função de sua velocidade  $v$ , em quilômetros por hora.



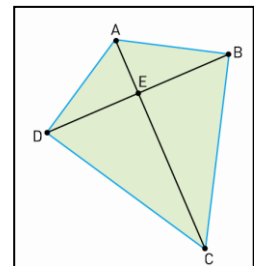
Admita que o freio desse carro seja acionado quando ele alcançar a velocidade de 100 km/h.

Calcule sua distância de frenagem, em metros.

5) Para construir a pipa representada na figura abaixo pelo quadrilátero ABCD, foram utilizadas duas varetas, linha e papel.

As varetas estão representadas pelos segmentos AC e BD. A linha utilizada liga as extremidades A, B, C e D das varetas, e o papel reveste a área total da pipa.

Os segmentos AC e BD são perpendiculares em E, e os ângulos ABC e ADC são retos. Se os segmentos AE e EC medem, respectivamente, 18cm e 32cm, determine o comprimento total da linha, representada por  $AB + BC + CD + DA$ .



6) Para enviar mensagens sigilosas substituindo letras por números, foi utilizado um sistema no qual cada letra do alfabeto está associada a um único número  $n$ , formando a sequência de 26 números ilustrada na tabela:

Letra	A	B	C	D	E	...	W	X	Y	Z
Número $n$	1	2	3	4	5	...	23	24	25	26

Para utilizar o sistema, cada número  $n$ , correspondente a uma determinada letra, é transformado em um

número  $f(n)$ , de acordo com a seguinte função:  $f(n) = \begin{cases} 2n + 3, & \text{se } 1 \leq n \leq 10 \\ 50 - n, & \text{se } 11 \leq n \leq 26 \end{cases}$ , na qual  $n \in \mathbb{N}$ .

As letras do nome **ANA**, por exemplo, estão associadas aos números [1 14 1]. Ao se utilizar o sistema, obtém-se a nova matriz  $[f(1) f(14) f(1)]$ , gerando a matriz código [5 36 5].

Considere a destinatária de uma mensagem cujo nome corresponde à seguinte matriz código:

[7 13 5 30 32 21 24].

Identifique esse nome.

7) Para transportar areia, uma loja dispõe de um caminhão cuja caçamba tem 1m de altura e a forma de um paralelepípedo retângulo de base quadrada. A maior distância entre dois pontos desse paralelepípedo é igual a 3m. Determine a capacidade máxima, em metros cúbicos, dessa caçamba.

8) Considere a equação a seguir, que se reduz a uma equação do terceiro grau:

$$(x + 2)^4 = x^4$$

Uma de suas raízes é real e as outras são imaginárias. Determine as três raízes dessa equação.

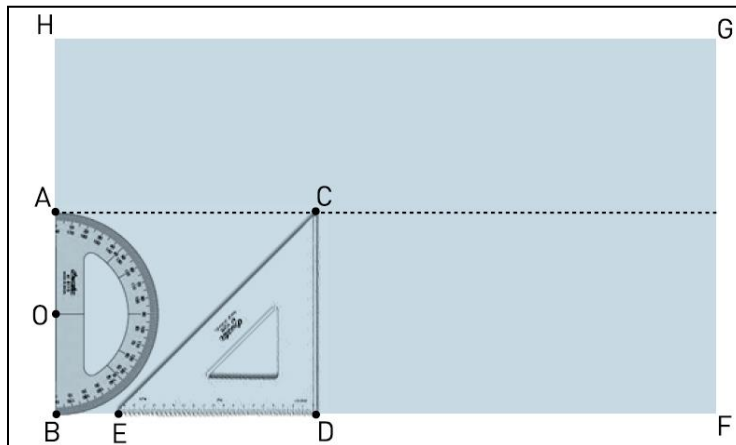
9) Todas as  $n$  capitais de um país estão interligadas por estradas pavimentadas, de acordo com o seguinte critério: uma única estrada liga cada duas capitais.

Com a criação de duas novas capitais, foi necessária a construção de mais 21 estradas pavimentadas para que todas as capitais continuassem ligadas de acordo com o mesmo critério.

Determine o número  $n$  de capitais, que existiam inicialmente nesse país.

10) A figura abaixo representa a superfície plana de uma mesa retangular BFGH na qual estão apoiados os seguintes instrumentos para desenho geométrico, ambos de espessuras desprezíveis:

- um transferidor com a forma de um semicírculo de centro O e diâmetro AB;
- um esquadro CDE, com a forma de um triângulo retângulo isósceles.



Considere as informações abaixo:

**ED** está contido em **BF**;

**OA** está contido em **BH**;

**AB** = 10 cm;

**BD** = 13 cm.

Calcule a medida, em centímetros, do menor segmento que liga a borda do transferidor à borda do esquadro.



**Exame Discursivo – 2012 - GABARITO**

1) Para comprar os produtos A e B em uma loja, um cliente dispõe da quantia X, em reais. O preço do produto A corresponde a  $\frac{2}{3}$  de X, e o do produto B corresponde à fração restante. No momento de efetuar o pagamento, uma promoção reduziu em 10% o preço de A. Sabendo que, com o desconto, foram gastos R\$ 350,00 na compra dos produtos A e B, calcule o valor, em reais, que o cliente deixou de gastar.

**Solução. Estabelecendo a equação correspondente à situação apresentada, temos:**

$$\begin{aligned} \text{Preço}(A) &= \frac{2X}{3} \\ \left\{ \begin{aligned} \text{Preço}(A)_{\text{Desconto}} &= \frac{2X}{3} \cdot (1 - 0,1) = \frac{2X}{3} \cdot (0,9) = \frac{1,8X}{3} \\ \text{Preço}(B) &= \frac{X}{3} \end{aligned} \right. \Rightarrow \frac{1,8X}{3} + \frac{X}{3} = 350 \Rightarrow 2,8X = 3(350) \Rightarrow \\ \Rightarrow X &= \frac{1050}{2,8} = \text{R}\$375,00. \\ \text{Economia: } &\text{R}\$375,00 - \text{R}\$350,00 = \text{R}\$25,00 \end{aligned}$$

Utilize as informações a seguir para responder às questões de números 2 e 3.

Na tabela abaixo, estão indicados os preços do rodízio de pizzas de um restaurante.

DIAS DA SEMANA	VALOR UNITÁRIO DO RODÍZIO (R\$)
Segunda-feira, terça-feira, quarta-feira e quinta-feira.	18,50
Sexta-feira, sábado e domingo.	22,00

2) Considere um cliente que foi a esse restaurante todos os dias de uma mesma semana, pagando um rodízio em cada dia.

Determine o valor médio que esse cliente pagou, em reais, pelo rodízio nessa semana.

**Solução. Utilizando a fórmula para dados agrupados, vem:**

$$\bar{x} = \frac{4 \cdot (18,5) + 3 \cdot (22)}{4 + 3} = \frac{74,0 + 66}{7} = \frac{140}{7} = \text{R}\$20,00.$$

3) Considere agora outro cliente que escolheu aleatoriamente dois dias de uma mesma semana para comer pizzas nesse sistema de rodízio, pagando também um rodízio em cada dia.

Calcule a probabilidade de que o valor total gasto pelo cliente nesses dois dias seja o mínimo possível.

**Solução 1. Para que o gasto seja mínimo ele terá que escolher dois dias dentre os mais baratos:**

$$P(\text{mínimo}) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}.$$

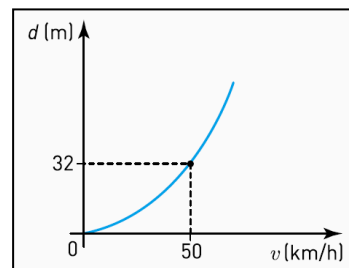
**Solução 2. Utilizando o espaço amostral e análise e combinatória, temos:**

$$P(\text{mínimo}) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{\frac{4!}{2!2!}}{\frac{7!}{2!5!}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{7 \cdot 6 \cdot 5!} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}.$$

4) Distância de frenagem é aquela percorrida por um carro do instante em que seu freio é acionado até o momento em que ele para. Essa distância é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade que o carro está desenvolvendo no instante em que o freio é acionado.

O gráfico abaixo indica a distância de frenagem  $d$ , em metros, percorrida por um carro, em função de sua velocidade  $v$ , em quilômetros por hora. Admita que o freio desse carro seja acionado quando ele alcançar a velocidade de 100 km/h. Calcule sua distância de frenagem, em metros.

**Solução.** De acordo com a informação a expressão da função será dada por  $d(v) = k.v^2$ . Um ponto indicado no gráfico é (50,32). Substituindo e encontrando o valor pedido, temos:

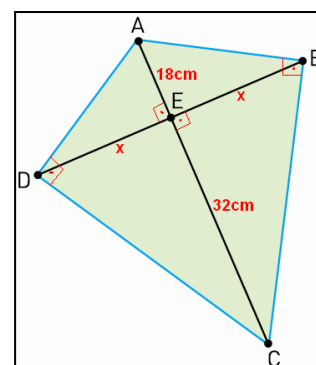


$$\begin{aligned} \text{i)} & \begin{cases} d(50) = 32 \\ d(50) = k.(50)^2 \end{cases} \Rightarrow 2500k = 32 \Rightarrow k = \frac{32}{2500} = \frac{8}{625} \\ \text{ii)} & \begin{cases} d(v) = \frac{8}{625}.v^2 \\ v = 100\text{km/h} \end{cases} \Rightarrow d(100) = \frac{8}{625}.(100)^2 = \frac{8}{625}.(10000) = 8(16) = 128\text{m} \end{aligned}$$

5) Para construir a pipa representada na figura abaixo pelo quadrilátero ABCD, foram utilizadas duas varetas, linha e papel. As varetas estão representadas pelos segmentos AC e BD. A linha utilizada liga as extremidades A, B, C e D das varetas, e o papel reveste a área total da pipa. Os segmentos AC e BD são perpendiculares em E, e os ângulos ABC e ADC são retos. Se os segmentos AE e EC medem, respectivamente, 18cm e 32cm, determine o comprimento total da linha, representada por  $AB + BC + CD + DA$ .

**Solução.** Os triângulos ABC e ADC são congruentes e as medidas 18cm e 32cm representam as projeções da altura  $x$  sobre a hipotenusa AC. Utilizando as relações envolvendo triângulos retângulos, temos:

$$\begin{aligned} \text{i)} & x^2 = (18).(32) \Rightarrow x = \sqrt{3^2.2.2^4.2} = \sqrt{3^2.2^6} = 3.(2^3) = 3.(8) = 24\text{cm} \\ \text{ii)} & \begin{cases} \overline{AD} = \overline{AB} \\ \overline{AD} = \sqrt{18^2 + 24^2} \end{cases} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{AD} = \sqrt{324 + 576} = \sqrt{900} = 30\text{cm} \\ \text{iii)} & \begin{cases} \overline{DC} = \overline{BC} \\ \overline{BC} = \sqrt{32^2 + 24^2} \end{cases} \Rightarrow \overline{DC} = \overline{BC} = \sqrt{1024 + 576} = \sqrt{1600} = 40\text{cm} \\ \text{iv)} & \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{DC} + \overline{DA} = 2.(30) + 2(40) = 60 + 80 = 140\text{cm} \end{aligned}$$



6) Para enviar mensagens sigilosas substituindo letras por números, foi utilizado um sistema no qual cada letra do alfabeto está associada a um único número  $n$ , formando a sequência de 26 números ilustrada na tabela:

Letra	A	B	C	D	E	...	W	X	Y	Z
Número $n$	1	2	3	4	5	...	23	24	25	26

Para utilizar o sistema, cada número  $n$ , correspondente a uma determinada letra, é transformado em um número  $f(n)$ , de acordo com a seguinte função:  $f(n) = \begin{cases} 2n + 3, & \text{se } 1 \leq n \leq 10 \\ 50 - n, & \text{se } 11 \leq n \leq 26 \end{cases}$ , na qual  $n \in \mathbb{N}$ .

As letras do nome **ANA**, por exemplo, estão associadas aos números [1 14 1]. Ao se utilizar o sistema, obtém-se a nova matriz [ $f(1)$   $f(14)$   $f(1)$ ], gerando a matriz código [5 36 5].

Considere a destinatária de uma mensagem cujo nome corresponde à seguinte matriz código:

**[7 13 5 30 32 21 24].**

Identifique esse nome.

**Solução.** Calculando os valores de  $n$  possíveis numa tabela, descartamos as incompatíveis.

	7	13	5	30	32	21	24
$2n+3$	$n = 2; B$	$n = 5; E$	$n = 1; A$	$n = 13,5$	$n = 14,5$	$n = 9; I$	$n = 10,5$
$50-n$	$n = 43$	$n = 37$	$n = 45$	$n = 20; T$	$n = 18; R$	$n = 29$	$n = 26; Z$

**O nome é BEATRIZ.**

7) Para transportar areia, uma loja dispõe de um caminhão cuja caçamba tem 1m de altura e a forma de um paralelepípedo retângulo de base quadrada. A maior distância entre dois pontos desse paralelepípedo é igual a 3m. Determine a capacidade máxima, em metros cúbicos, dessa caçamba.

**Solução.** A distância máxima entre dois pontos do paralelepípedo é a diagonal. Utilizando a fórmula, temos:

i) Dimensões:  $\begin{cases} \text{altura} = 1 \\ \text{comprimento} = x \\ \text{largura} = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 3 \\ d = \sqrt{1^2 + x^2 + x^2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2x^2 + 1} = 3 \Rightarrow 2x^2 + 1 = 9 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2\text{m}$

ii) Volume:  $(1) \cdot (2) \cdot (2) = 4\text{m}^3$

8) Considere a equação a seguir, que se reduz a uma equação do terceiro grau:

$$(x + 2)^4 = x^4$$

Uma de suas raízes é real e as outras são imaginárias. Determine as três raízes dessa equação.

**Solução. Desenvolvendo a expressão temos:**

i)  $(x + 2)^4 = (x^2 + 4x + 4)(x^2 + 4x + 4) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x^3 + 16x^2 + 16x + 4x^2 + 16x + 16 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (x + 2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$

ii)  $(x + 2)^4 = x^4 \Rightarrow x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 = x^4 \Rightarrow 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0$

**Na pesquisa de raízes, as possíveis racionais são os divisores de 2:  $\{\pm 1, \pm 2\}$ . Testando, vem:**

- $x = 1$  não é raiz, pois a soma dos coeficientes não é nula;
- $x = -1 \Rightarrow (-1)^3 + 3(-1)^2 + 4(-1) + 2 = -1 + 3 - 4 + 2 = 0$ . Logo,  $x = -1$  é raiz.

**Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:**

-1	1	3	4	2
	1	2	2	0

**Resolvendo a equação:  $x^2 + 2x + 2 = 0$ , temos:**

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1) \cdot (2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + i \\ x_2 = -1 - i \end{cases}$$

**As raízes são:  $\{-1; -1 - i; -1 + i\}$**

9) Todas as  $n$  capitais de um país estão interligadas por estradas pavimentadas, de acordo com o seguinte critério: uma única estrada liga cada duas capitais. Com a criação de duas novas capitais, foi necessária a construção de mais 21 estradas pavimentadas para que todas as capitais continuassem ligadas de acordo com o mesmo critério. Determine o número  $n$  de capitais, que existiam inicialmente nesse país.

**Solução. O número inicial de estradas é a combinação de  $n$  capitais duas a duas:  $C(n,2)$ . Com a criação de duas capitais passamos a  $(n + 2)$  capitais. Esse acréscimo originou mais 21 estradas. O total de estradas é  $C(n+2,2)$ . Logo,  $C(n+2,2) - C(n,2) = 21$ . Desenvolvendo, temos:**

$$\begin{cases} C_{n+2}^2 = \frac{(n+2)!}{2!(n+2-2)!} = \frac{(n+2)!}{2!n!} = \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n!}{2!n!} = \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} \\ C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2!(n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} - \frac{n \cdot (n-1)}{2} = 21$$

$\Rightarrow n^2 + n + 2n + 2 - n^2 + n = 42 \Rightarrow 4n = 40 \Rightarrow n = 10$  capitais

10) A figura abaixo representa a superfície plana de uma mesa retangular BFGH na qual estão apoiados os seguintes instrumentos para desenho geométrico, ambos de espessuras desprezíveis:

- um transferidor com a forma de um semicírculo de centro O e diâmetro AB;
- um esquadro CDE, com a forma de um triângulo retângulo isósceles.

Considere as informações abaixo:

**ED** está contido em **BF**;      **OA** está contido em **BH**;

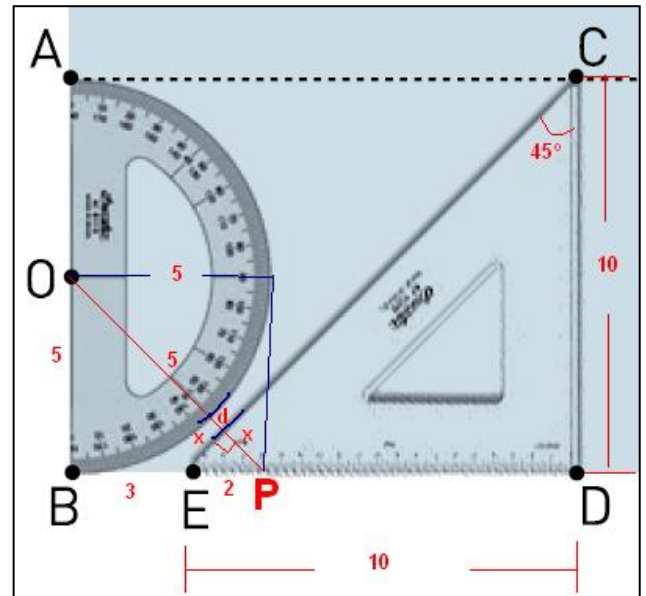
**AB** = 10 cm;

**BD** = 13 cm.

Calcule a medida, em centímetros, do menor segmento que liga a borda do transferidor à borda do esquadro.

**Solução 1.** O triângulo ECD é retângulo isósceles. Logo o ângulo E é de  $45^\circ$ . A distância OP é mínima. Logo OP é perpendicular a CE. O triângulo retângulo OBP é retângulo isósceles. Logo o ângulo P é de  $45^\circ$  e OP é hipotenusa do triângulo valendo  $OP = 5\sqrt{2}$ . A distância pedida "d" será calculada com auxílio do cálculo do cateto "x" do triângulo retângulo isósceles determinado pela intersecção do triângulos OBP e ECD.

$$\begin{aligned} \text{i) } 2^2 &= x^2 + x^2 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \\ \text{ii) } 5 + d + x &= 5\sqrt{2} \Rightarrow d = 5\sqrt{2} - 5 - \sqrt{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow d = (4\sqrt{2} - 5)\text{cm} \end{aligned}$$



**Solução 2.** Representando os pontos no eixo cartesiano, temos:

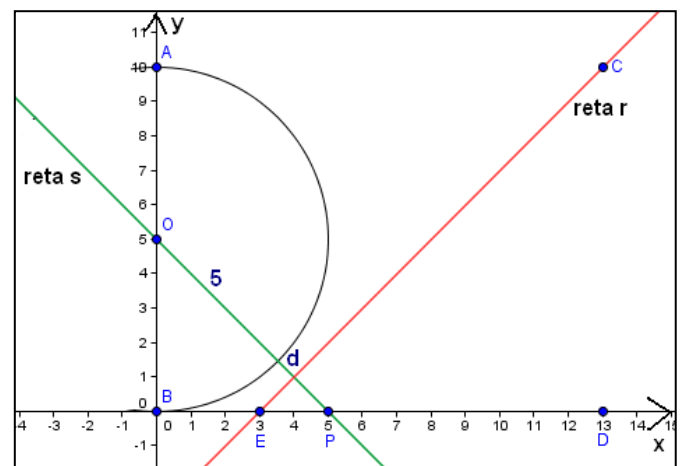
A distância pedida "d" está representada na figura.

i) A reta  $r$  passa pelos pontos (13,10) e (3,0). Sua equação é:

$$\begin{aligned} m_r &= \frac{10-0}{13-3} = \frac{10}{10} = 1 \\ y &= x + b \Rightarrow 0 = 3 + b \Rightarrow b = -3 \\ r: y - x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

ii) A distância do ponto  $O(0,5)$  à reta  $r$  vale:

$$d(O,r) = \frac{|5-0+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$



A distância  $d$  é a diferença entre a distância do ponto  $O$  à reta e o raio da circunferência 5.

Logo,  $d = (4\sqrt{2} - 5)\text{cm}$ .



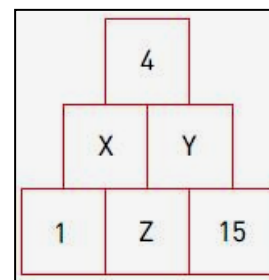
**Exame Discursivo - 2013**

1. (UERJ) Um imóvel perde 36% do valor de venda a cada dois anos. O valor  $V(t)$  desse imóvel em  $t$  anos pode ser obtido por meio da fórmula a seguir, na qual  $V_0$  corresponde ao seu valor atual.

$$V(t) = V_0 \times (0,64)^{\frac{t}{2}}$$

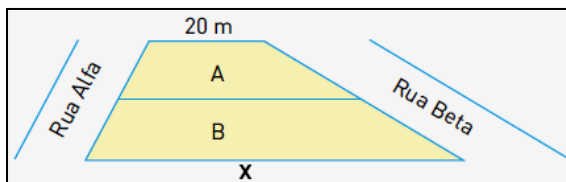
Admitindo que o valor de venda atual do imóvel seja igual a 50 mil reais, calcule seu valor de venda daqui a três anos.

2. (UERJ) A ilustração abaixo mostra seis cartões numerados organizados em três linhas. Em cada linha, os números estão dispostos em ordem crescente, da esquerda para a direita. Em cada cartão, está registrado um número exatamente igual à diferença positiva dos números registrados nos dois cartões que estão imediatamente abaixo dele. Por exemplo, os cartões 1 e Z estão imediatamente abaixo do cartão X.



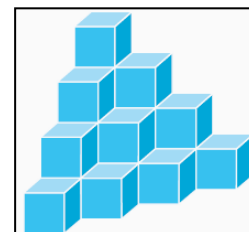
Determine os valores de X, Y e Z.

3. (UERJ) Dois terrenos, A e B, ambos com a forma de trapézio, têm as frentes de mesmo comprimento voltadas para a Rua Alfa. Os fundos dos dois terrenos estão voltados para a Rua Beta. Observe o esquema:

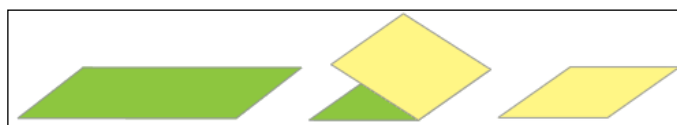


As áreas de A e B são, respectivamente, proporcionais a 1 e 2, e a lateral menor do terreno A mede 20m. Calcule o comprimento  $x$ , em metros, da lateral maior do terreno B.

4. (UERJ) Na figura, está representada uma torre de quatro andares construída com cubos congruentes empilhados, sendo sua base formada por dez cubos. Calcule o número de cubos que formam a base de outra torre, com 100 andares, construída com cubos iguais e procedimento idêntico.



5. (UERJ) Considere uma folha de papel retangular que foi dobrada ao meio, resultando em duas partes, cada uma com metade da área inicial da folha, conforme as ilustrações.

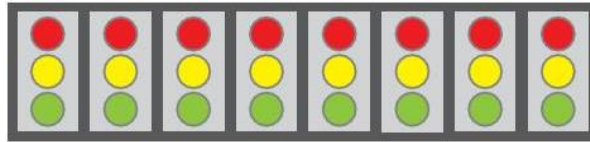


x	$2^x$
9	$10^{2,70}$
10	$10^{3,01}$
11	$10^{3,32}$
12	$10^{3,63}$

Esse procedimento de dobradura pode ser repetido  $n$  vezes, até resultar em partes com áreas inferiores a 0,0001% da área inicial da folha.

Calcule o menor valor de  $n$ . Se necessário, utilize em seus cálculos os dados da tabela.

6. (UERJ) Um sistema luminoso, constituído de oito módulos idênticos, foi montado para emitir mensagens em código. Cada módulo possui três lâmpadas de cores diferentes – vermelha, amarela e verde. Observe a figura.



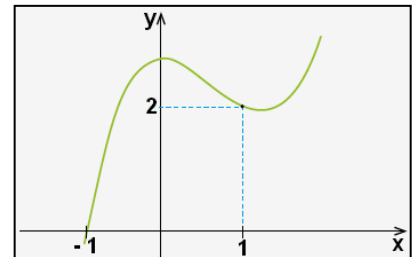
Considere as seguintes informações:

- cada módulo pode acender apenas uma lâmpada por vez;
- qualquer mensagem é configurada pelo acendimento simultâneo de três lâmpadas vermelhas, duas verdes e uma amarela, permanecendo dois módulos com as três lâmpadas apagadas;
- duas mensagens são diferentes quando pelo menos uma das posições dessas cores acesas é diferente.

Calcule o número de mensagens distintas que esse sistema pode emitir.

7. (UERJ) O gráfico abaixo representa a função polinomial  $P$  do 3º grau que intersecta o eixo das abscissas no ponto  $(-1, 0)$ .

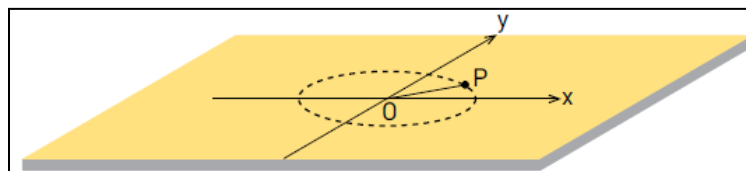
Determine o resto da divisão de  $P(x)$  por  $x^2 - 1$ .



8. (UERJ) Um professor propõe a um aluno uma tarefa de matemática composta das etapas descritas a seguir.

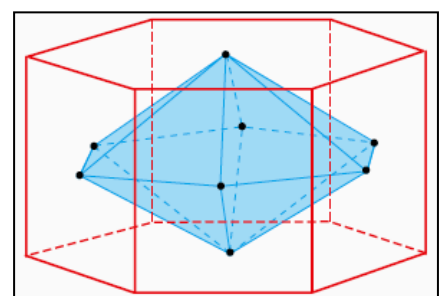
- 1ª Escrever o número de quatro algarismos da data de seu aniversário, dois referentes ao dia e dois referentes ao mês.
  - 2ª Misturar os quatro algarismos desse número formando um número  $N$ , de modo que a ordem das unidades de milhar não seja ocupada por zero.
  - 3ª Subtrair 1001 do número  $N$ , tantas vezes quantas forem necessárias, até obter o primeiro valor menor do que 1001.
  - 4ª Informar ao professor o valor obtido na 3ª etapa.
  - 5ª Calcular o resto  $R$  da divisão do número  $N$ , obtido na 2ª etapa, por 11.
- O professor consegue determinar o valor de  $R$  sem conhecer o valor de  $N$ . Sabendo que o valor obtido na 3ª etapa foi 204, determine  $R$ .

9. (UERJ) Um objeto de dimensões desprezíveis, preso por um fio inextensível, gira no sentido anti-horário em torno de um ponto  $O$ . Esse objeto percorre a trajetória  $T$ , cuja equação é  $x^2 + y^2 = 25$ . Observe a figura:



Admita que o fio arrebente no instante em que o objeto se encontra no ponto  $P(4,3)$ . A partir desse instante, o objeto segue na direção da reta tangente a  $T$  no ponto  $P$ . Determine a equação dessa reta.

10. (UERJ) Um cristal com a forma de um prisma hexagonal regular, após ser cortado e polido, deu origem a um sólido de 12 faces triangulares congruentes. Os vértices desse poliedro são os centros das faces do prisma, conforme representado na figura. Calcule a razão entre os volumes do sólido e do prisma.





**Exame Discursivo – 2013 – GABARITO**

1. (UERJ) Um imóvel perde 36% do valor de venda a cada dois anos. O valor  $V(t)$  desse imóvel em  $t$  anos pode ser obtido por meio da fórmula a seguir, na qual  $V_0$  corresponde ao seu valor atual.

$$V(t) = V_0 \times (0,64)^{\frac{t}{2}}$$

Admitindo que o valor de venda atual do imóvel seja igual a 50 mil reais, calcule seu valor de venda daqui a três anos.

**Solução.** Substituindo o valor inicial e utilizando as propriedades das potências, temos:

$$\begin{cases} V(t) = V_0 \times (0,64)^{\frac{t}{2}} \\ V_0 = 50000 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow V(3) = 50000 \cdot \left(\frac{64}{100}\right)^{\frac{3}{2}} = 50000 \cdot \left[\left(\frac{8}{10}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = 50000 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^{2 \cdot \frac{3}{2}} = 50000 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(3) = 50000 \cdot \left(\frac{512}{1000}\right) = (50)(512) = \text{R}\$25600,00$$

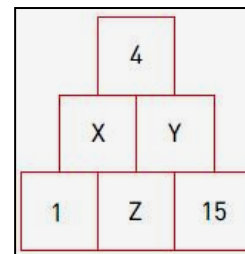
2. (UERJ) A ilustração abaixo mostra seis cartões numerados organizados em três linhas. Em cada linha, os números estão dispostos em ordem crescente, da esquerda para a direita. Em cada cartão, está registrado um número exatamente igual à diferença positiva dos números registrados nos dois cartões que estão imediatamente abaixo dele. Por exemplo, os cartões 1 e Z estão imediatamente abaixo do cartão X.

Determine os valores de X, Y e Z.

**Solução.** De acordo com as informações, temos:

$$\begin{cases} y > x \Rightarrow y - x = 4 \\ z > 1 \Rightarrow x = z - 1 \Rightarrow (15 - z) - (z - 1) = 4 \Rightarrow 15 - z - z + 1 = 4 \Rightarrow -2z = 4 - 16 \Rightarrow \\ 15 > z \Rightarrow y = 15 - z \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = \frac{-12}{-2} = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = z - 1 = 5 \\ y = 15 - 6 = 9 \end{cases}$$

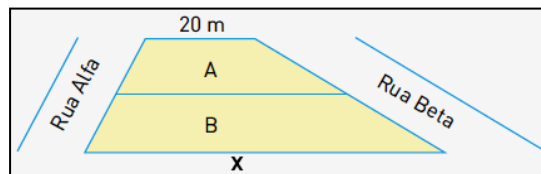


**Resposta:**  $x = 5$ ;  $y = 9$  e  $z = 6$ .

3. (UERJ) Dois terrenos, A e B, ambos com a forma de trapézio, têm as frentes de mesmo comprimento voltadas para a Rua Alfa. Os fundos dos dois terrenos estão voltados para a Rua Beta. Observe o esquema:

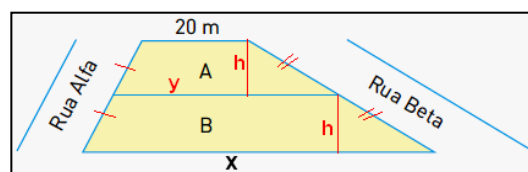
As áreas de A e B são, respectivamente, proporcionais a 1 e 2, e a lateral menor do terreno A mede 20m.

Calcule o comprimento  $x$ , em metros, da lateral maior do terreno B.



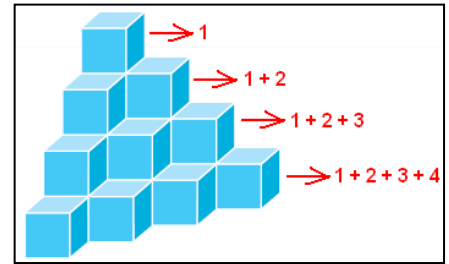
**Solução.** O segmento  $y$  é base média do trapézio de bases 20 e  $x$ , pois as frentes (lados não paralelos) possuem a mesma medida. Identificando as medidas na figura e utilizando a fórmula do trapézio, temos:

$$\begin{aligned} \text{i) } & A = \left(\frac{20+y}{2}\right) \cdot h; \quad B = \left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot h \\ \text{ii) } & \frac{A}{B} = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 2A \Rightarrow \left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot h = 2 \cdot \left(\frac{20+y}{2}\right) \cdot h \Rightarrow y+x = 2(20+y) \Rightarrow \\ & \Rightarrow y+x = 40+2y \Rightarrow y = x-40 \\ \text{iii) } & \begin{cases} y = x-40 \\ y(\text{base média}) = \frac{20+x}{2} \Rightarrow \frac{20+x}{2} = x-40 \Rightarrow 2x-80 = 20+x \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x-x = 80+20 \Rightarrow x = 100\text{m} \end{cases} \end{aligned}$$



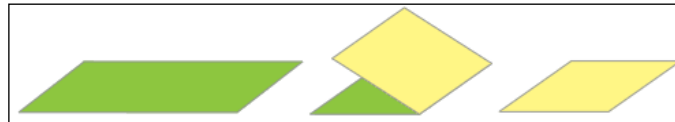
4. (UERJ) Na figura, está representada uma torre de quatro andares construída com cubos congruentes empilhados, sendo sua base formada por dez cubos. Calcule o número de cubos que formam a base de outra torre, com 100 andares, construída com cubos iguais e procedimento idêntico.

**Solução.** Observe que o número de cubos em cada andar, partindo do mais alto, é o resultado da soma do total de cubos do andar anterior com o número indicador do andar atual. Logo, com 5 andares a base teria  $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 15$  cubos. Essa soma representa a soma de uma Progressão Aritmética de razão 1. Calculando o número de cubos da base para 100 andares, temos:



$$\text{Base: } S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = \frac{(1+100) \cdot 100}{2} = (101) \cdot (55) = 5050$$

5. (UERJ) Considere uma folha de papel retangular que foi dobrada ao meio, resultando em duas partes, cada uma com metade da área inicial da folha, conforme as ilustrações.



x	2 <sup>x</sup>
9	10 <sup>2,70</sup>
10	10 <sup>3,01</sup>
11	10 <sup>3,32</sup>
12	10 <sup>3,63</sup>

Esse procedimento de dobradura pode ser repetido n vezes, até resultar em partes com áreas inferiores a **0,0001%** da área inicial da folha.

Calcule o menor valor de n. Se necessário, utilize em seus cálculos os dados da tabela.

**Solução.** As dobras ao meio indicam potências de base (1/2). Considerando A como área inicial,

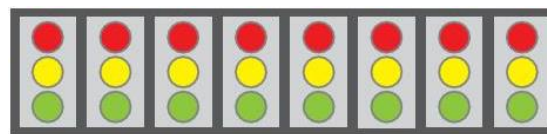
temos:  $\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot A < 0,0001\% \cdot A \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{10^{-4}}{100} \Rightarrow (2^{-1})^n < \frac{10^{-4}}{10^2} \Rightarrow 2^{-n} < 10^{-4} \cdot 10^{-2} \Rightarrow 2^{-n} < 10^{-6} \Rightarrow 2^n > 10^6$

Comparando as possíveis somas das potências de 10 na tabela mais próximas de 10<sup>6</sup>, temos:

- i) 2,70 + 3,01 = 5,71 < 6; ii) 2,70 + 3,32 = 6,02; iii) 2,70 + 3,63 = 6,33; iv) 3,01 + 3,32 = 6,33; v) 3,01 + 3,63 = 6,64; vi) 3,32 + 3,63 = 6,95. O valor mais próximo é o (ii).

Temos:  $10^6 < 10^{2,70 + 3,32} = 10^{6,02} = 2^{9+11} = 2^{20}$ . Como  $2^n > 2^{20} > 10^6$  então n = 20 é o menor valor.

6. (UERJ) Um sistema luminoso, constituído de oito módulos idênticos, foi montado para emitir mensagens em código. Cada módulo possui três lâmpadas de cores diferentes – vermelha, amarela e verde. Observe a figura.



Considere as seguintes informações:

- cada módulo pode acender apenas uma lâmpada por vez;
- qualquer mensagem é configurada pelo acendimento simultâneo de três lâmpadas vermelhas, duas verdes e uma amarela, permanecendo dois módulos com as três lâmpadas apagadas;
- duas mensagens são diferentes quando pelo menos uma das posições dessas cores acesas é diferente.

Calcule o número de mensagens distintas que esse sistema pode emitir.

**Solução 1.** Há  $C_8^6 = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!2!} = (4)(7) = 28$  maneiras de 6 módulos ficarem acesos. Em cada uma haverá a permutação das cores: (VERM) (VERM) (VERM) (VERDE) (VERDE) (AMARELA), num total de  $\frac{6!}{3!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = 60$ . Logo são  $(60) \cdot (28) = 1680$  mensagens distintas.

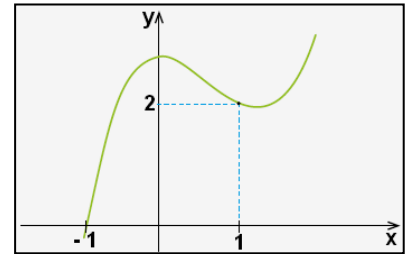
**Solução 2.** Como haverá 2 módulos vazios, temos uma permutação com repetição da configuração:

(VERM) (VERM) (VERM) (VERDE) (VERDE) (AMARELA) (VAZIO) (VAZIO):  $\frac{8!}{3!2!2!} = 1680$ .

7. (UERJ) O gráfico abaixo representa a função polinomial  $P$  do 3º grau que intersecta o eixo das abscissas no ponto  $(-1,0)$ .

Determine o resto da divisão de  $P(x)$  por  $x^2 - 1$ .

**Solução.** O divisor é  $x^2 - 1$  (grau 2). O resto será, no máximo, de grau 1. Isto é,  $R(x) = ax + b$ . Pelo gráfico temos que  $P(-1) = 0$  e  $P(1) = 2$ .



$$P(x) = (x^2 - 1)q(x) + ax + b$$

i)  $P(-1) = 0 \Rightarrow ((-1)^2 - 1)q(-1) + a(-1) + b = 0 \Rightarrow -a + b = 0$

ii)  $P(1) = 2 \Rightarrow (1^2 - 1)q(1) + a(1) + b = 2 \Rightarrow a + b = 2$

iii)  $\begin{cases} -a + b = 0 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + a = 2 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$ . Logo,  $a = 1$

O resto é  $R(x) = x + 1$ .

8. (UERJ) Um professor propõe a um aluno uma tarefa de matemática composta das etapas descritas a seguir.

1ª Escrever o número de quatro algarismos da data de seu aniversário, dois referentes ao dia e dois referentes ao mês.

2ª Misturar os quatro algarismos desse número formando um número  $N$ , de modo que a ordem das unidades de milhar não seja ocupada por zero.

3ª Subtrair 1001 do número  $N$ , tantas vezes quantas forem necessárias, até obter o primeiro valor menor do que 1001.

4ª Informar ao professor o valor obtido na 3ª etapa.

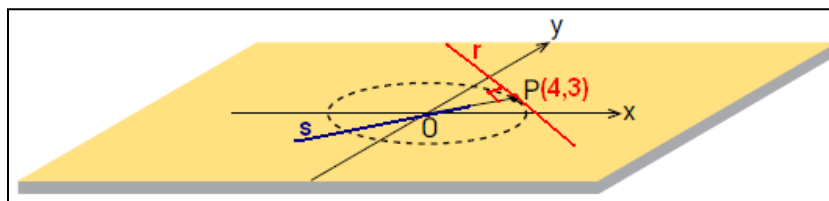
5ª Calcular o resto  $R$  da divisão do número  $N$ , obtido na 2ª etapa, por 11.

O professor consegue determinar o valor de  $R$  sem conhecer o valor de  $N$ . Sabendo que o valor obtido na 3ª etapa foi 204, determine  $R$ .

**Solução.** A operação na etapa 3, indica a divisão de  $N$  por 1001, obtendo resto  $r$  (valor informado ao professor) e quociente  $q$ . Essa operação pode ser representada por  $N = 1001 \cdot q + r$ . A etapa 5 consiste na divisão de  $N$  por 11, com quociente  $q'$  e resto  $R$ . Operação representada por  $N = 11 \cdot q' + R$ . De acordo com a informação,  $r = 204$ . Observando que  $1001 = (13) \cdot (7) \cdot (11)$ , isto é, 1001 é múltiplo de 11, e que  $204 = 11 \cdot 18 + 6$ , temos:

$$\begin{cases} N = 1001 \cdot q + 204 = 11 \cdot (91q) + 11(18) + 6 = 11(91q + 18) + 6 \\ N = 11q' + R \end{cases} \Rightarrow R = 6$$

9. (UERJ) Um objeto de dimensões desprezíveis, preso por um fio inextensível, gira no sentido anti-horário em torno de um ponto  $O$ . Esse objeto percorre a trajetória  $T$ , cuja equação é  $x^2 + y^2 = 25$ . Observe a figura:



Admita que o fio arrebente no instante em que o objeto se encontra no ponto  $P(4,3)$ . A partir desse instante, o objeto segue na direção da reta tangente a  $T$  no ponto  $P$ . Determine a equação dessa reta.

**Solução.** A circunferência está centrada na origem. A reta  $s$  que passa por  $O$  e  $P$  possui equação:

$$\begin{cases} 3 = a(4) + b \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow s: y = \frac{3x}{4}$$

A reta pedida  $r$  é perpendicular a  $s$  e também passa por  $(4,3)$ .

$$m_r = \frac{3}{4} \Rightarrow m_s = -\frac{4}{3} \Rightarrow r: y = -\frac{4x}{3} + n$$

$$(4,3) \in r \Rightarrow 3 = -\frac{4(4)}{3} + n \Rightarrow 9 + 16 = 3n \Rightarrow n = \frac{25}{3}. \text{ Logo, } s: y = -\frac{4x}{3} + \frac{25}{3} \text{ ou } 4x + 3y = 25$$

10. (UERJ) Um cristal com a forma de um prisma hexagonal regular, após ser cortado e polido, deu origem a um sólido de 12 faces triangulares congruentes. Os vértices desse poliedro são os centros das faces do prisma, conforme representado na figura. Calcule a razão entre os volumes do sólido e do prisma.

**Solução. Identificando os elementos na figura, temos:**

- i) L: aresta da base do prisma.
- ii) H: altura do prisma.
- iii) L': aresta do sólido.
- iv) H/2: altura da pirâmide superior do sólido (mesma da pirâmide inferior).

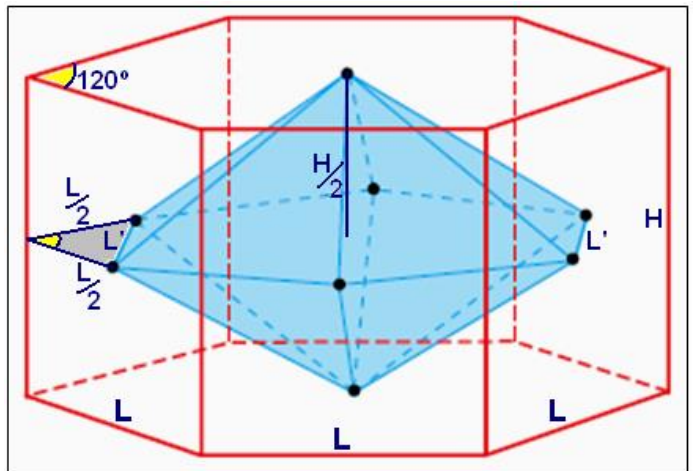
A aresta L' do sólido pode ser calculada pela lei dos cossenos no triângulo assinalado.

$$L'^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{2}\right) \cos 120^\circ$$

$$L'^2 = \frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{4} - 2 \cdot \left(\frac{L^2}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$L'^2 = \frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4}$$

$$L' = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$



O volume do sólido será o dobro do volume da pirâmide hexagonal regular de aresta da base L' e altura H/2.

$$V(\text{sólido}) = 2 \cdot \left[ 6 \cdot \left( \frac{L'^2 \sqrt{3}}{4} \right) \cdot \frac{H}{2} \right] = \left[ 3 \cdot \left( \frac{L'^2 \sqrt{3}}{2} \right) \cdot H \right] = 3H \cdot \frac{\left( \frac{L\sqrt{3}}{2} \right)^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{\left( \frac{9HL^2 \sqrt{3}}{4} \right)}{2} = \frac{9HL^2 \sqrt{3}}{8}$$

O volume do prisma é:  $V(\text{prisma}) = 6 \left( \frac{L^2 \sqrt{3}}{4} \right) \cdot H = \frac{3HL^2 \sqrt{3}}{2}$

A razão pedida é:  $\frac{V(\text{sólido})}{V(\text{prisma})} = \frac{\frac{9HL^2 \sqrt{3}}{8}}{\frac{3HL^2 \sqrt{3}}{2}} = \frac{9HL^2 \sqrt{3}}{8} \cdot \frac{2}{3HL^2 \sqrt{3}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$



**Exame Discursivo - 2014**

1. (UERJ) Campanha do governo de Dubai contra a obesidade oferece prêmio em ouro por quilogramas perdidos. A campanha funciona premiando os participantes de acordo com a seguinte tabela:

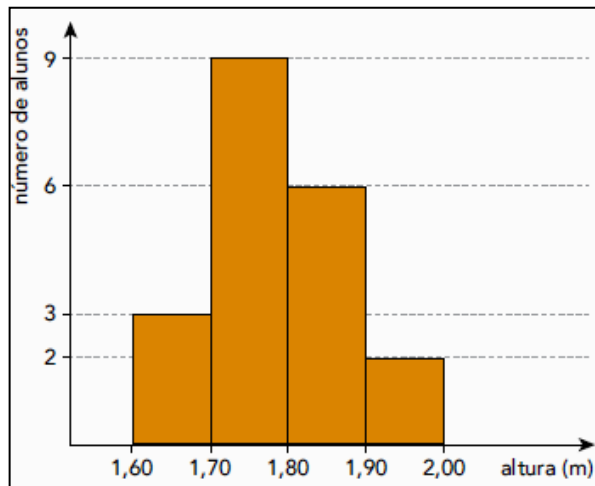
Assim, se uma pessoa perder 4kg, receberá 4g de ouro; se perder 7kg receberá 14g; se perder 15kg receberá 45g. (*Adaptado de g1.globo.com, 18/08/2013*).

Considere um participante da campanha que receba 16g de ouro pelo número inteiro de quilogramas perdidos. Sabendo que a massa dessa pessoa, ao receber o prêmio, é de 93,0kg, determine o valor inteiro de sua massa, em quilogramas, no início da campanha.

Massa perdida (kg)	Ouro recebido (g/kg perdido)
até 5	1
6 a 10	2
mais de 10	3

**Utilize as informações a seguir para responder às questões de números 02 e 03.**

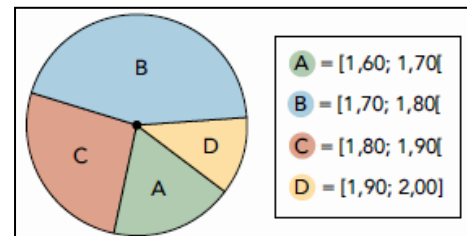
Após serem medidas as alturas dos alunos de uma turma, elaborou-se o seguinte histograma:



2. (UERJ) Sabe-se que, em um histograma, se uma reta vertical de equação  $x = x_0$  divide ao meio a área do polígono formado pelas barras retangulares, o valor de  $x_0$  corresponde à mediana da distribuição dos dados representados. Calcule a mediana das alturas dos alunos representadas no histograma.

3. (UERJ) Os dados do histograma também podem ser representados em um gráfico de setores. Observe:

Calcule o maior ângulo central, em graus, desse gráfico de setores.



4. (UERJ) Observe o anúncio, que apresenta descontos promocionais de uma loja.

Admita que essa promoção obedeça à seguinte sequência:

- primeiro desconto de 10% sobre o preço da mercadoria;
- segundo desconto de 10% sobre o valor após o primeiro desconto;
- desconto de R\$100,00 sobre o valor após o segundo desconto.



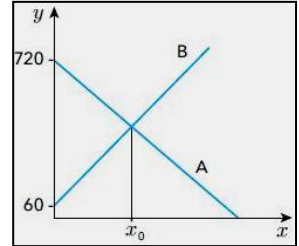
Determine o preço inicial de uma mercadoria cujo valor, após os três descontos, é igual a R\$710,00.

5. (UERJ) Considere a sequência de matrizes  $(A_1, A_2, A_3, \dots)$ , todas quadradas de ordem 4, respectivamente

iguais a:  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 & 27 \\ 28 & 29 & 30 & 31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 32 & 33 & 34 & 35 \\ 36 & 37 & 38 & 39 \\ 40 & 41 & 42 & 43 \\ 44 & 45 & 46 & 47 \end{pmatrix}, \dots$

Sabendo que o elemento  $a_{ij} = 75432$  é da matriz  $A_n$ , determine os valores de  $n$ ,  $i$  e  $j$ .

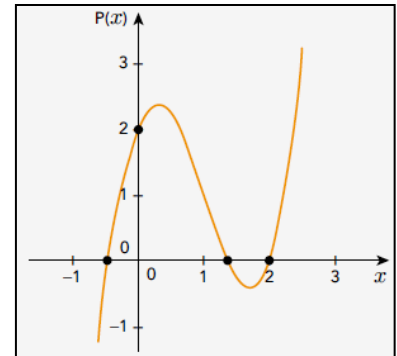
6. (UERJ) O reservatório A perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto o reservatório B ganha água a uma taxa constante de 12 litros por hora. No gráfico, estão representados, no eixo  $y$ , os volumes, em litros, da água contida em cada um dos reservatórios, em função do tempo, em horas, representado no eixo  $x$ .



Determine o tempo  $x_0$ , em horas, indicado no gráfico.

7. (UERJ) Observe o gráfico da função polinomial de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  definida por  $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x + 2$ .

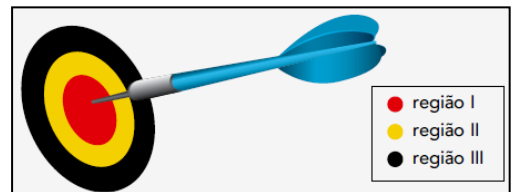
Determine o conjunto solução da inequação  $P(x) > 0$ .



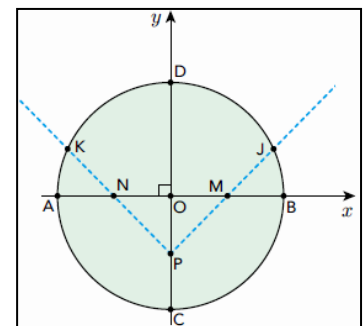
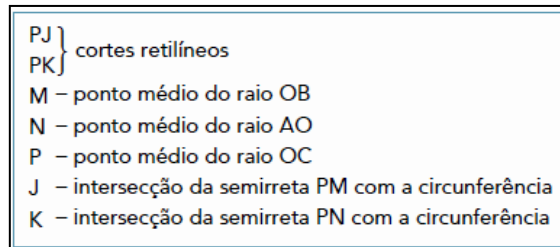
8. (UERJ) Um alvo de dardos é formado por três círculos concêntricos que definem as regiões I, II e III, conforme mostra a ilustração. Um atirador de dardos sempre acerta alguma região do alvo, sendo suas probabilidades de acertar as regiões I, II e III denominadas, respectivamente,  $P_I$ ,  $P_{II}$  e  $P_{III}$ . Para esse atirador, valem as seguintes relações:

- $P_{II} = 3P_I$
- $P_{III} = 2P_{II}$

Calcule a probabilidade de que esse atirador acerte a região I exatamente duas vezes ao fazer dois lançamentos.

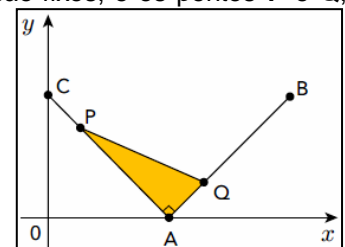


9. (UERJ) Um disco metálico de centro O e diâmetro  $AB = 4\text{dm}$ , utilizado na fabricação de determinada peça, é representado pelo seguinte esquema:



Calcule a distância entre os pontos J e K.

10. (UERJ) No gráfico, estão indicados os pontos  $A(1,0)$ ,  $B(2,1)$  e  $C(0,1)$ , que são fixos, e os pontos P e Q, que se movem simultaneamente. O ponto P se desloca no segmento de reta de C até A, enquanto o ponto Q se desloca no segmento de A até B. Nesses deslocamentos, a cada instante, a abscissa de P é igual à ordenada de Q. Determine a medida da maior área que o triângulo PAQ pode assumir.





**Exame Discursivo – 2014 - GABARITO**

1. (UERJ) Campanha do governo de Dubai contra a obesidade oferece prêmio em ouro por quilogramas perdidos. A campanha funciona premiando os participantes de acordo com a seguinte tabela:

Assim, se uma pessoa perder 4kg, receberá 4g de ouro; se perder 7kg receberá 14g; se perder 15kg receberá 45g. (*Adaptado de g1.globo.com, 18/08/2013*).

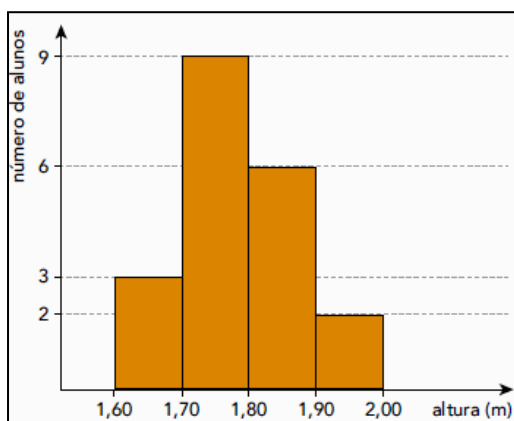
Massa perdida (kg)	Ouro recebido (g/kg perdido)
até 5	1
6 a 10	2
mais de 10	3

Considere um participante da campanha que receba 16g de ouro pelo número inteiro de quilogramas perdidos. Sabendo que a massa dessa pessoa, ao receber o prêmio, é de 93,0kg, determine o valor inteiro de sua massa, em quilogramas, no início da campanha.

**Solução.** Como 16 é o dobro de 8 (única possibilidade), temos que o participante perdeu 8kg. Logo sua massa no início era de (93,0kg + 8kg) = 101kg.

**Utilize as informações a seguir para responder às questões de números 02 e 03.**

Após serem medidas as alturas dos alunos de uma turma, elaborou-se o seguinte histograma:

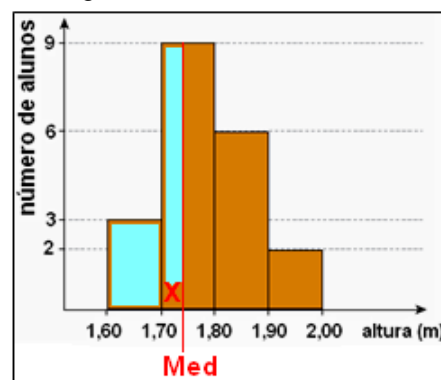


2. (UERJ) Sabe-se que, em um histograma, se uma reta vertical de equação  $x = x_0$  divide ao meio a área do polígono formado pelas barras retangulares, o valor de  $x_0$  corresponde à mediana da distribuição dos dados representados. Calcule a mediana das alturas dos alunos representadas no histograma.

**Solução.** Há (2 + 3 + 6 + 9) = 20 dados, logo a mediana estará entre o 10º e 11º dado. Este valor se encontra na segunda classe. Considerando  $\underline{x}$  a base do retângulo de altura 9 e sabendo que essa área vale a metade da área total, temos:

$$i) (0,1).3 + 9x = \frac{(0,1).20}{2} \Rightarrow 9x = 1 - 0,3 \Rightarrow x = \frac{0,7}{9} = 0,077... \cong 0,07$$

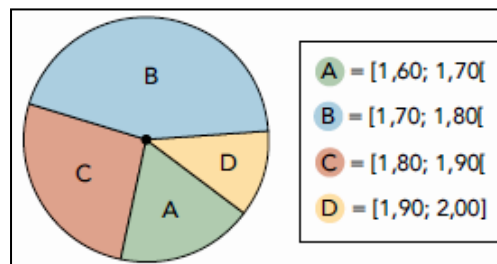
$$ii) \text{Mediana} : 1,70 + 0,07 = 1,77$$



3. (UERJ) Os dados do histograma também podem ser representados em um gráfico de setores. Observe: Calcule o maior ângulo central, em graus, desse gráfico de setores.

**Solução.** O maior ângulo central corresponde ao setor B. Este setor representa a frequência de 9 alunos de um total de 20. Logo, associando 20 ao total de 360º, temos:

$$\frac{\text{Setor B}}{9} = \frac{360^\circ}{20} \Rightarrow \text{Setor B} = \frac{(9).(360^\circ)}{20} = (9).(18^\circ) = 162^\circ$$



4. (UERJ) Observe o anúncio, que apresenta descontos promocionais de uma loja.

Admita que essa promoção obedeça à seguinte sequência:

- primeiro desconto de 10% sobre o preço da mercadoria;
- segundo desconto de 10% sobre o valor após o primeiro desconto;
- desconto de R\$100,00 sobre o valor após o segundo desconto.



Determine o preço inicial de uma mercadoria cujo valor, após os três descontos, é igual a R\$710,00.

**Solução. Utilizando o conceito de descontos sucessivos, temos:**

$$\begin{cases} \text{Preço inicial: } P \\ \text{Preço final: } 710 \end{cases} \Rightarrow P \cdot (1 - 0,1) \cdot (1 - 0,1) - 100 = 710 \Rightarrow P \cdot (0,9) \cdot (0,9) = 810 \Rightarrow P = \frac{810}{0,81} \Rightarrow P = \frac{81000}{81} = \text{R}\$1000,00$$

5. (UERJ) Considere a sequência de matrizes  $(A_1, A_2, A_3, \dots)$ , todas quadradas de ordem 4, respectivamente

$$\text{iguais a: } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 & 27 \\ 28 & 29 & 30 & 31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 32 & 33 & 34 & 35 \\ 36 & 37 & 38 & 39 \\ 40 & 41 & 42 & 43 \\ 44 & 45 & 46 & 47 \end{pmatrix}, \dots$$

Sabendo que o elemento  $a_{ij} = 75432$  é da matriz  $A_n$ , determine os valores de  $n$ ,  $i$  e  $j$ .

**Solução. Observe que cada elemento da 1ª matriz corresponde aos restos possíveis na divisão por 16. Cada um desses elementos são os primeiros elementos de uma progressão aritmética de razão 16.**

**Exemplo: O elemento  $a_{33} = 10$  é o resto da divisão de 10, 26, 42, etc por 16. Todos ocupando a mesma posição em suas respectivas matrizes. Logo, basta encontrarmos o resto de 75432 na divisão por 16.**

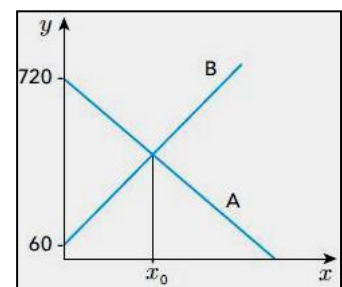
**i)  $75432 \div 16 = 4714$ , resto 8. Logo, o elemento 75432 é o elemento  $a_{31}$ . Isto é  $i = 3$  e  $j = 1$ .**

**ii) Temos que:  $75432 = 8 + (n - 1) \cdot 16 \Rightarrow 75432 - 8 = (n - 1) \cdot 16 \Rightarrow 75424 \div 16 = n - 1 \Rightarrow n - 1 = 4714 \Rightarrow n = 4714 + 1 \Rightarrow n = 4715$ .**

6. (UERJ) O reservatório A perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto o reservatório B ganha água a uma taxa constante de 12 litros por hora. No gráfico, estão representados, no eixo  $y$ , os volumes, em litros, da água contida em cada um dos reservatórios, em função do tempo, em horas, representado no eixo  $x$ . Determine o tempo  $x_0$ , em horas, indicado no gráfico.

**Solução. A perda constante no reservatório A indica uma função afim dada pela lei  $f(x) = ax + b$ , com  $a = -10$ . O ganho constante do reservatório B indica uma função afim com  $a = 12$ . Escrevendo as equações das retas A e B, temos:**

$$\begin{cases} \text{reta A} \begin{cases} a = -10 \\ 720 = -10 \cdot (0) + b \Rightarrow b = 720 \end{cases} \Rightarrow y = -10x + 720 \\ \text{reta B} \begin{cases} a = 12 \\ 60 = 12 \cdot (0) + b \Rightarrow b = 60 \end{cases} \Rightarrow y = 12x + 60 \end{cases}$$



**O tempo  $x_0$  corresponde à interseção das retas:**

$$-10x + 720 = 12x + 60 \Rightarrow -22x = -660 \Rightarrow x = \frac{-660}{-22} = 30. \quad \text{R: } x_0 = 30.$$

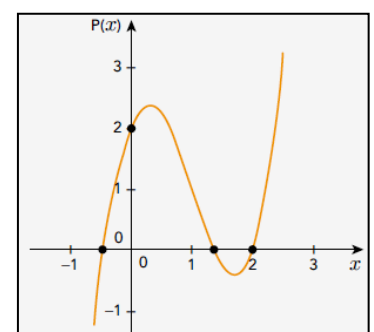
7. (UERJ) Observe o gráfico da função polinomial de R em R definida por  $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x + 2$ .

Determine o conjunto solução da inequação  $P(x) > 0$ .

**Solução. O gráfico intersecta o eixo X no ponto  $x = 2$ . Logo, o polinômio é divisível por  $(x - 2)$ . Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:**

2		2	-6	3	2
		2	-2	-1	0

**O quociente é  $Q(x) = 2x^2 - 2x - 1$ . Encontrando as raízes desse polinômio, temos:**



$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 - 4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \end{cases} \cdot \text{Solução: } P(x) > 0: \left[ \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right] \cup ]2, +\infty[.$$

8. (UERJ) Um alvo de dardos é formado por três círculos concêntricos que definem as regiões I, II e III, conforme mostra a ilustração. Um atirador de dardos sempre acerta alguma região do alvo, sendo suas probabilidades de acertar as regiões I, II e III denominadas, respectivamente, PI, PII e PIII. Para esse atirador, valem as seguintes relações: • PII = 3PI; • PIII = 2PII

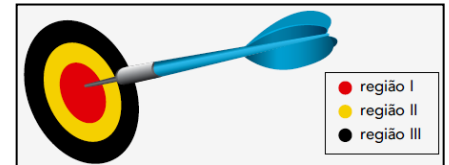
Calcule a probabilidade de que esse atirador acerte a região I exatamente duas vezes ao fazer dois lançamentos.

**Solução.** Considere  $x$  a probabilidade de o atirador acertar a região I.

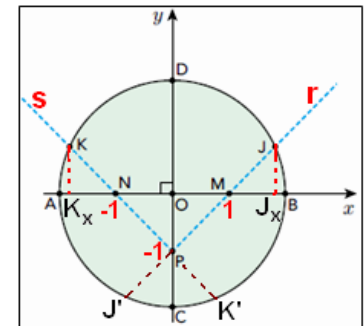
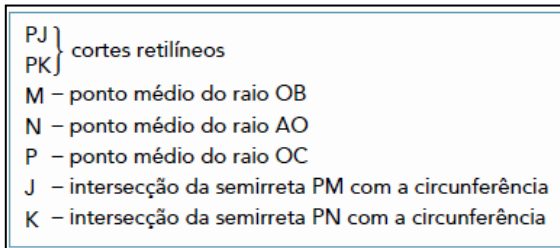
**Temos:**

$$\text{i) } \begin{cases} PI = x \Rightarrow PII = 3x \Rightarrow PIII = 2(3x) = 6x \\ \sum \text{Probabilidades} = 1 \end{cases} \Rightarrow x + 3x + 6x = 1 \Rightarrow 10x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{10}.$$

$$\text{ii) } P(\text{acertar I duas vezes}) = P(x \cap x) = \left(\frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{100} \rightarrow 1\%$$



9. (UERJ) Um disco metálico de centro O e diâmetro AB = 4dm, utilizado na fabricação de determinada peça, é representado pelo seguinte esquema:



Calcule a distância entre os pontos J e K.

**Solução.** O raio da circunferência centrada da origem vale 2dm. Os pontos J e K são as interseções das retas  $r$  e  $s$  com a circunferência. A distância pedida será entre as abscissas de K ( $K_x$ ) e de J ( $J_x$ ).

$$r: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x(1) - y(1) + 1(-1) = 0 \Rightarrow r: x - y = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y = 1 \Rightarrow y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + (x - 1)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + x^2 - 2x + 1 - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(2)(-3)}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 24}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 + \sqrt{7}}{2} \rightarrow J_x \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{7}}{2} \rightarrow 3^\circ \text{ Quadrante} \end{cases}$$

$$s: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x(1) - y(-1) + 1(1) = 0 \Rightarrow r: x + y = -1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y = -1 \Rightarrow y = -x - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + (-x - 1)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(2)(-3)}}{4} \Rightarrow$$

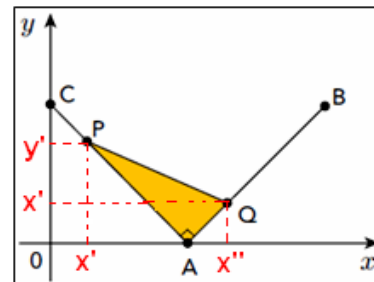
$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 24}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1 - \sqrt{7}}{2} \rightarrow k_x \\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{7}}{2} \rightarrow 4^\circ \text{ Quadrante} \end{cases}$$

**A distância é:**  $J_x - k_x = \frac{1 + \sqrt{7}}{2} - \left(\frac{-1 - \sqrt{7}}{2}\right) = \frac{1 + \sqrt{7}}{2} + \frac{1 + \sqrt{7}}{2} = (1 + \sqrt{7}) \text{ dm}.$

10. (UERJ) No gráfico, estão indicados os pontos  $A(1,0)$ ,  $B(2,1)$  e  $C(0,1)$ , que são fixos, e os pontos  $P$  e  $Q$ , que se movem simultaneamente. O ponto  $P$  se desloca no segmento de reta de  $C$  até  $A$ , enquanto o ponto  $Q$  se desloca no segmento de reta de  $A$  até  $B$ . Nesses deslocamentos, a cada instante, a abscissa de  $P$  é igual à ordenada de  $Q$ . Determine a medida da maior área que o triângulo  $PAQ$  pode assumir.

**Solução.** As coordenadas de  $P$  são  $(x', y')$  e de  $Q$ ,  $(x'', x')$ . As equações das retas que passam por  $AC$  e  $AB$  são:

$$\begin{aligned} \text{reta } AC : & \begin{cases} 1 = a(0) + b \Rightarrow b = 1 \\ 0 = a(1) + b \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \end{cases} \Rightarrow y_{AC} = -x + 1 \\ \text{reta } AB : & \begin{cases} 0 = a(1) + b \Rightarrow b = -a \\ 1 = a(2) + b \Rightarrow 2a - a = 1 \Rightarrow a = 1 \end{cases} \Rightarrow y_{AB} = x - 1 \end{aligned}$$



**Encontrando as coordenadas de  $P$  e  $Q$  que pertencem às retas  $AC$  e  $AB$ , respectivamente, temos:**

$$\begin{aligned} P \in \text{reta } AC : y' = -x' + 1 &\Rightarrow P(x', -x' + 1) \\ Q \in \text{reta } AB : x' = x'' - 1 &\Rightarrow x'' = x' + 1 \Rightarrow Q(x' + 1, x') \\ \text{Catetos: } & \begin{cases} \overline{AP} = \sqrt{(x' - 1)^2 + (x' + 1 - 0)^2} = \sqrt{2(x' - 1)^2} = |(x' - 1)|\sqrt{2} = (1 - x') \cdot \sqrt{2} \\ \overline{AQ} = \sqrt{(x' + 1 - 1)^2 + (x' - 0)^2} = \sqrt{2(x')^2} = |x'|\sqrt{2} = x' \cdot \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Área} : \frac{[(1 - x')\sqrt{2}][x'\sqrt{2}]}{2} = -x'^2 + x' \end{aligned}$$

**Maximizando a área, vem:**  $\text{Área(máxima)} : -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(1)^2 - 4(-1) \cdot (0)}{4(-1)} = \frac{1}{4}$



**Exame Discursivo – 2015**

1. (UERJ) O cartão pré-pago de um usuário do metrô tem R\$8,90 de crédito. Para uma viagem, foi debitado desse cartão o valor de R\$3,25, correspondente a uma passagem. Em seguida, o usuário creditou mais R\$20,00 nesse mesmo cartão. Admitindo que o preço da passagem continue o mesmo, e que não será realizado mais crédito algum, determine o número máximo de passagens que ainda podem ser debitadas desse cartão.

2. (UERJ) Leia a tirinha.

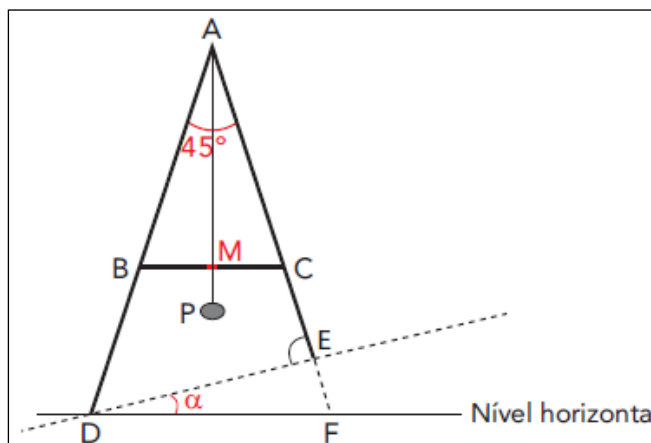


Suponha que existam exatamente 700 milhões de analfabetos no mundo e que esse número seja reduzido, a uma taxa constante, em 10% ao ano, totalizando  $n$  milhões daqui a três anos. Calcule o valor de  $n$ .

3. (UERJ) Uma ferramenta utilizada na construção de uma rampa é composta pela seguinte estrutura:
- duas varas de madeira, correspondentes aos segmentos AE e AD, que possuem comprimentos diferentes e formam o ângulo  $\widehat{DAE}$  igual a  $45^\circ$ ;
  - uma travessa, correspondente ao segmento BC, que une as duas varas e possui uma marca em seu ponto médio M;
  - um fio fixado no vértice A e amarrado a uma pedra P na outra extremidade;
  - nesse conjunto, os segmentos AB e AC são congruentes.

Observe o esquema que representa essa estrutura:

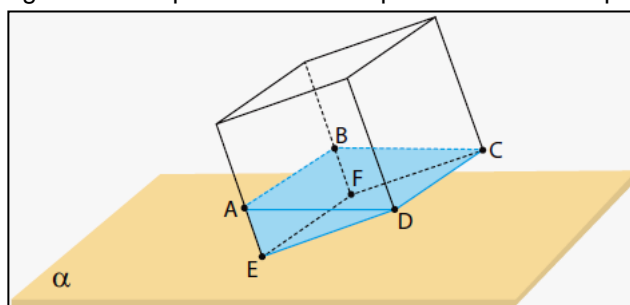
Quando o fio passa pelo ponto M, a travessa BC fica na posição horizontal. Com isso, obtém-se, na reta que liga os pontos D e E, a inclinação a desejada. Calcule  $\alpha$ , supondo que o ângulo  $\widehat{A\hat{E}D}$  mede  $85^\circ$ .



4. (UERJ) Um cubo de aresta EF medindo 8dm contém água e está apoiado sobre um plano  $\alpha$  de modo que apenas a aresta EF esteja contida nesse plano. A figura abaixo representa o cubo com a água.

Considere que a superfície livre do líquido no interior do cubo seja um retângulo ABCD com área igual a  $32\sqrt{5} \text{ dm}^2$ .

Determine o volume total, em  $\text{dm}^3$ , de água contida nesse cubo.



5. (UERJ) Em uma escola circulam dois jornais: *Correio do Grêmio* e *O Estudante*. Em relação à leitura desses jornais, por parte dos 840 alunos da escola, sabe-se que:

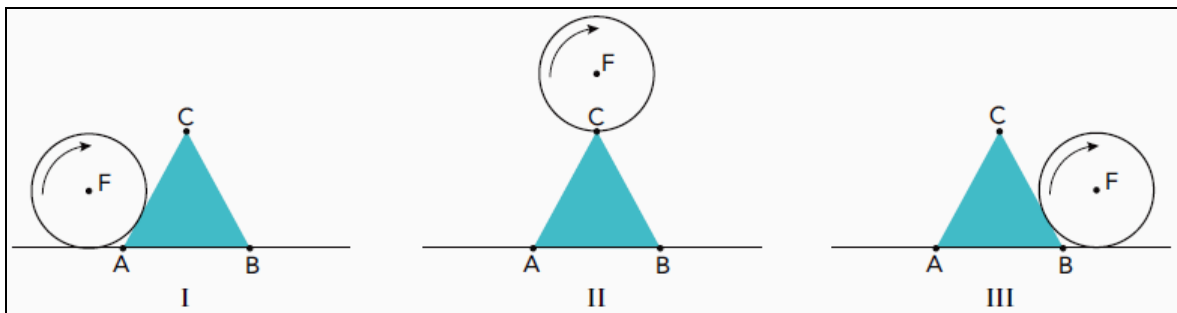
- 10% não leem esses jornais;
- 520 leem o jornal *O Estudante*;
- 440 leem o jornal *Correio do Grêmio*.

Calcule o número total de alunos do colégio que leem os dois jornais.

6. (UERJ) Ao digitar corretamente a expressão  $\log_{10}(-2)$  em uma calculadora, o retorno obtido no visor corresponde a uma mensagem de erro, uma vez que esse logaritmo não é um número real.

Determine todos os valores reais de  $x$  para que o valor da expressão  $\log_{0,1}(\log_{10}(\log_{0,1}(x)))$  seja um número real.

7. (UERJ) Um tubo cilíndrico cuja base tem centro  $F$  e raio  $r$  rola sem deslizar sobre um obstáculo com a forma de um prisma triangular regular. As vistas das bases do cilindro e do prisma são mostradas em três etapas desse movimento, I, II e III, nas figuras a seguir.



Admita que:

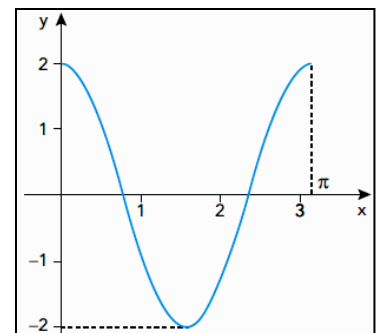
- as medidas do diâmetro do círculo de centro  $F$  e da altura do triângulo  $ABC$  são respectivamente iguais a  $2\sqrt{3}$  decímetros;
- durante todo o percurso, o círculo e o triângulo sempre se tangenciam.

Determine o comprimento total, em decímetros, do caminho descrito pelo centro  $F$  do círculo que representa a base do cilindro.

8. (UERJ) Considere a função real  $f$ , de variável real  $x$ , definida pelo seguinte determinante:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2\cos x & 2 \\ 1 & 2\cos x \end{vmatrix} \text{ para } 0 \leq x \leq \pi. \text{ Observe o gráfico da função } f.$$

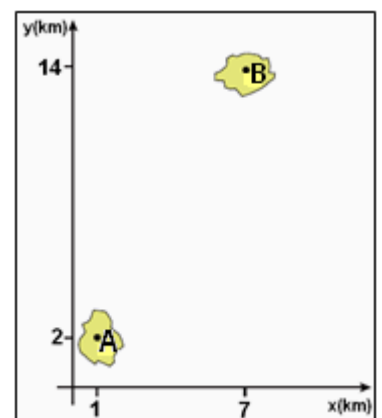
Determine os valores de  $x$  para os quais  $f(x) = 1$ .



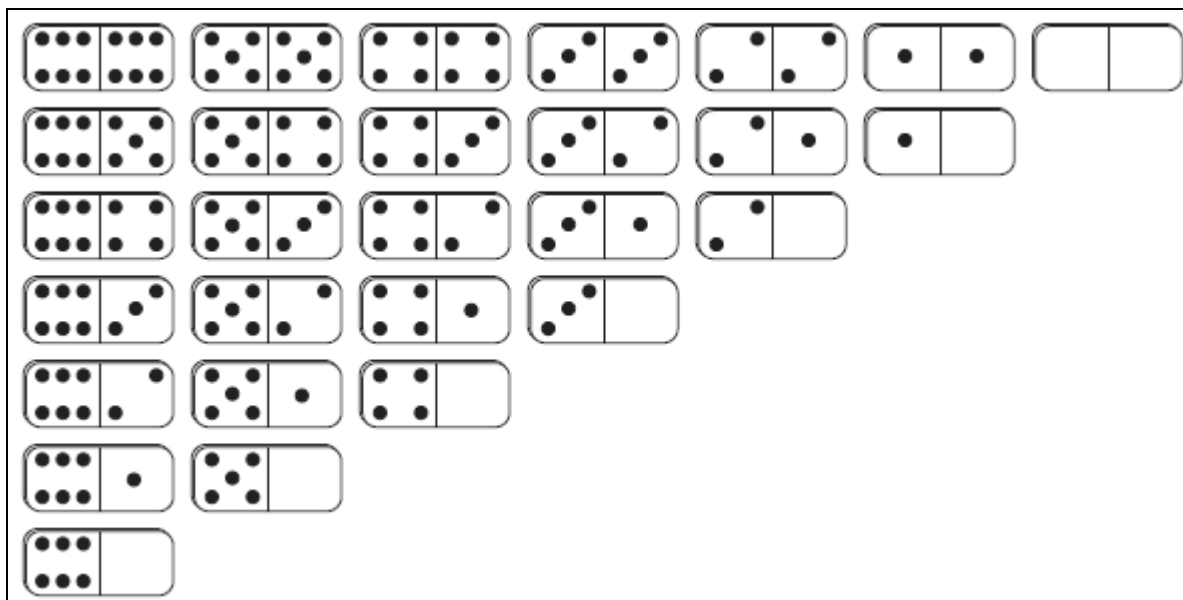
9. (UERJ) Uma ferrovia foi planejada para conter um trecho retilíneo cujos pontos são equidistantes dos centros  $A$  e  $B$  de dois municípios.

Em seu projeto de construção, utilizou-se o plano cartesiano, com coordenadas em quilômetros, em que  $A = (1,2)$  e  $B = (7,14)$ . Observe o gráfico:

Determine, utilizando esse sistema referencial, a equação da reta suporte desse trecho retilíneo da ferrovia.



10. (UERJ) Cada uma das 28 peças do jogo de dominó convencional, ilustradas abaixo, contém dois números, de zero a seis, indicados por pequenos círculos ou, no caso do zero, por sua ausência.



Admita um novo tipo de dominó, semelhante ao convencional, no qual os dois números de cada peça variem de zero a dez. Observe o desenho de uma dessas peças:



Considere que uma peça seja retirada ao acaso do novo dominó. Calcule a probabilidade de essa peça apresentar um número seis ou um número nove.



**Exame Discursivo – 2015 – GABARITO**

1. (UERJ) O cartão pré-pago de um usuário do metrô tem R\$8,90 de crédito. Para uma viagem, foi debitado desse cartão o valor de R\$3,25, correspondente a uma passagem. Em seguida, o usuário creditou mais R\$20,00 nesse mesmo cartão. Admitindo que o preço da passagem continue o mesmo, e que não será realizado mais crédito algum, determine o número máximo de passagens que ainda podem ser debitadas desse cartão.

**Solução.** Com o débito inicial de R\$3,25 restaram  $(R\$8,90 - R\$3,25) = R\$5,65$ . Com o crédito efetuado pelo usuário, o cartão passou a ter  $(R\$5,65 + R\$20,00) = R\$25,65$ . O preço da passagem é de R\$3,25. Logo, são possíveis  $(R\$25,65 \div 3,25) \approx 7,89 \rightarrow$  7 viagens a serem debitadas.

2. (UERJ) Leia a tirinha.



Suponha que existam exatamente 700 milhões de analfabetos no mundo e que esse número seja reduzido, a uma taxa constante, em 10% ao ano, totalizando n milhões daqui a três anos. Calcule o valor de n.

**Solução.** A taxa de redução constante de 10% ao ano ocorrendo por três anos corresponde à expressão:

$$\begin{cases} n(t) = 700000000(0,9)^t \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow n(3) = 700000000(0,9)^3 = 700000000(0,729) = 510300000.$$

**O total de analfabetos será de 510 300 000.**

3. (UERJ) Uma ferramenta utilizada na construção de uma rampa é composta pela seguinte estrutura:

- duas varas de madeira, correspondentes aos segmentos AE e AD, que possuem comprimentos diferentes e formam o ângulo DÂE igual a 45°;
- uma travessa, correspondente ao segmento BC, que une as duas varas e possui uma marca em seu ponto médio M;
- um fio fixado no vértice A e amarrado a uma pedra P na outra extremidade;
- nesse conjunto, os segmentos AB e AC são congruentes.

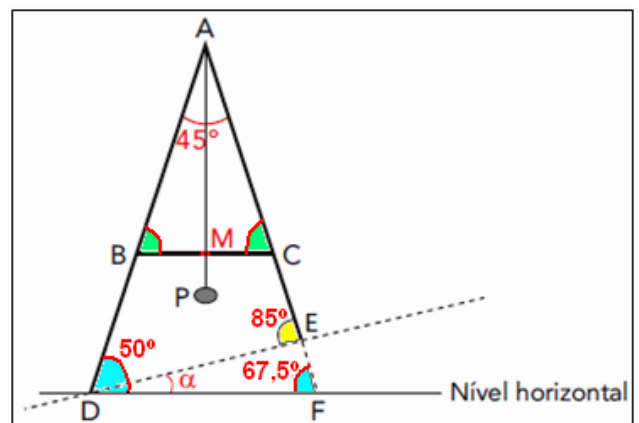
Observe o esquema que representa essa estrutura:

Quando o fio passa pelo ponto M, a travessa BC fica na posição horizontal. Com isso, obtém-se, na reta que liga os pontos D e E, a inclinação a desejada.

Calcule  $\alpha$ , supondo que o ângulo AÊD mede 85°.

**Solução.** O ângulo A mede 45°, os ângulos ADF e AFD são congruentes, pois o triângulo ADF é isósceles. Por outro lado, como AED mede 85°, o ângulo ADE mede  $180^\circ - (85^\circ + 45^\circ) = 50^\circ$ . Temos:

$$\begin{cases} \alpha + 50 = \hat{A}EF \\ \hat{AFD} = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67,5^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha = 67,5^\circ - 50^\circ = 17,5^\circ \rightarrow 17^\circ 30' \end{cases}$$



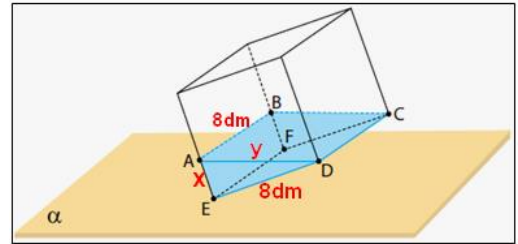
4. (UERJ) Um cubo de aresta EF medindo 8 dm contém água e está apoiado sobre um plano  $\alpha$  de modo que apenas a aresta EF esteja contida nesse plano. A figura abaixo representa o cubo com a água. Considere que a superfície livre do líquido no interior do cubo seja um retângulo ABCD com área igual a  $32\sqrt{5} \text{ dm}^2$ . Determine o volume total, em  $\text{dm}^3$ , de água contida nesse cubo.

**Solução.** O retângulo ABCD possui dimensões  $AB = 8 \text{ dm}$  e  $AD = y$ . Utilizando o valor da área, temos:

$$\begin{cases} A(\text{ABCD}) = 32\sqrt{5} \\ A(\text{ABCD}) = 8y \end{cases} \Rightarrow 8y = 32\sqrt{5} \Rightarrow y = \frac{32\sqrt{5}}{8} = 4\sqrt{5} \text{ dm}$$

O volume da água corresponde ao volume do prisma triangular cuja base é o triângulo retângulo AED e a altura  $AB = 8 \text{ dm}$ . Calculando o valor do cateto  $x$  e o volume temos:

$$\begin{aligned} \text{i) } x &= \sqrt{y^2 - 8^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - 64} = \sqrt{80 - 64} = \sqrt{16} = 4 \text{ dm} \\ \text{ii) } V &= A(\text{base}) \cdot h = \frac{(4) \cdot (8)}{2} \cdot (8) = 128 \text{ dm}^3 \end{aligned}$$



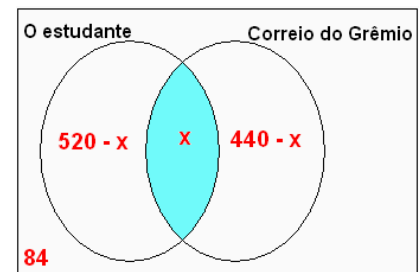
5. (UERJ) Em uma escola circulam dois jornais: *Correio do Grêmio* e *O Estudante*. Em relação à leitura desses jornais, por parte dos 840 alunos da escola, sabe-se que:

- 10% não leem esses jornais;
- 520 leem o jornal *O Estudante*;
- 440 leem o jornal *Correio do Grêmio*.

Calcule o número total de alunos do colégio que leem os dois jornais.

**Solução.** Não leem os jornais 10% de 840 = 84 alunos. Representando as informações em diagramas, temos:

$$\begin{aligned} 520 - x + x + 440 - x + 84 &= 840 \\ -x + 1044 &= 840 \\ -x &= 840 - 1044 \\ x &= 204 \end{aligned}$$



6. (UERJ) Ao digitar corretamente a expressão  $\log_{10}(-2)$  em uma calculadora, o retorno obtido no visor corresponde a uma mensagem de erro, uma vez que esse logaritmo não é um número real.

Determine todos os valores reais de  $x$  para que o valor da expressão  $\log_{0,1}(\log_{10}(\log_{0,1}(x)))$  seja um número real.

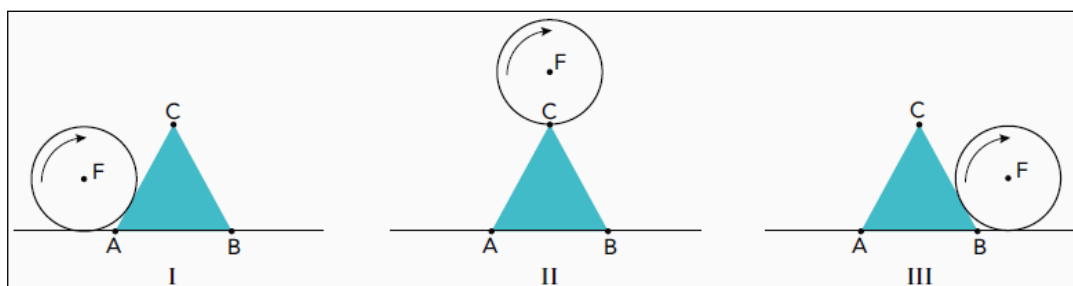
**Solução.** Para que a expressão seja um número real, basta que  $\log_{10}(\log_{0,1}(x)) > 0$ . Analisando os casos, temos:

$$\log_{10}(\log_{0,1}(x)) > 0 \Rightarrow \log_{10}(\log_{0,1}(x)) > \log_{10} 1 \Rightarrow \log_{0,1}(x) > 1 \Rightarrow \log_{0,1}(x) > \log_{0,1} 0,1 \Rightarrow x < 0,1$$

O valor de  $x$  deve estar no intervalo  $]0, 0,1[$ .

**OBS:** O sinal de desigualdade fica mantido se a base for maior que 1 e fica invertido se a base for maior que zero e menor que 1.

7. (UERJ) Um tubo cilíndrico cuja base tem centro F e raio  $r$  rola sem deslizar sobre um obstáculo com a forma de um prisma triangular regular. As vistas das bases do cilindro e do prisma são mostradas em três etapas desse movimento, I, II e III, nas figuras a seguir.

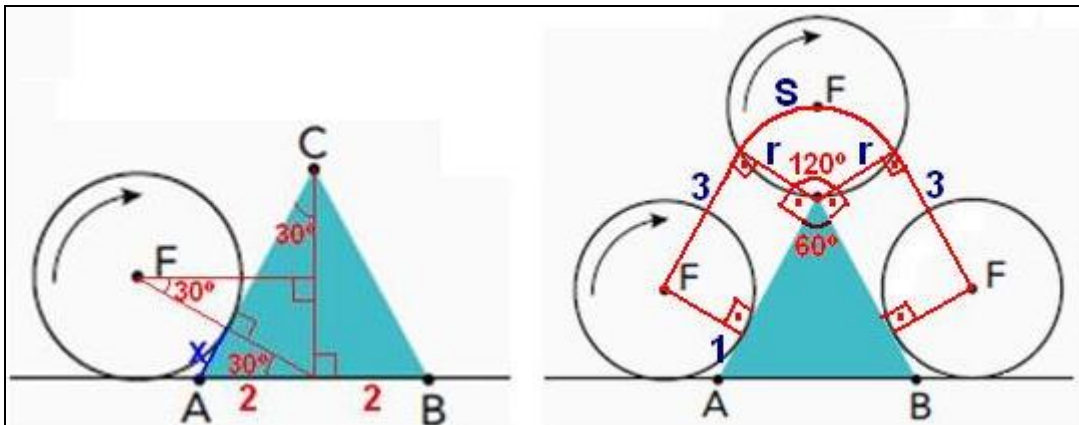


Admita que:

- as medidas do diâmetro do círculo de centro F e da altura do triângulo ABC são respectivamente iguais a  $2\sqrt{3}$  decímetros;
- durante todo o percurso, o círculo e o triângulo sempre se tangenciam.

Determine o comprimento total, em decímetros, do caminho descrito pelo centro F do círculo que representa a base do cilindro.

**Solução.** A figura ilustra o percurso do início ao fim.



a) Como a altura do triângulo vale  $2\sqrt{3}$ , temos:

$$\begin{aligned} \text{i) } h &= \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{L\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow L = 4 \text{ dm} \\ \text{ii) } \operatorname{sen}30^\circ &= \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1 \text{ dm} \end{aligned}$$

b) O percurso S é um arco de circunferência de ângulo central igual a  $120^\circ$ . Calculando em radianos,

temos:  $120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha \cdot R \\ R = \frac{\text{Diâmetro}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow S = \left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot (\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \text{ dm.} \end{cases}$

c) O total percorrido será:  $\text{Percurso: } 3 + 3 + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} = 6 + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} = \left(\frac{18 + 2\sqrt{3}\pi}{3}\right) \text{ dm.}$

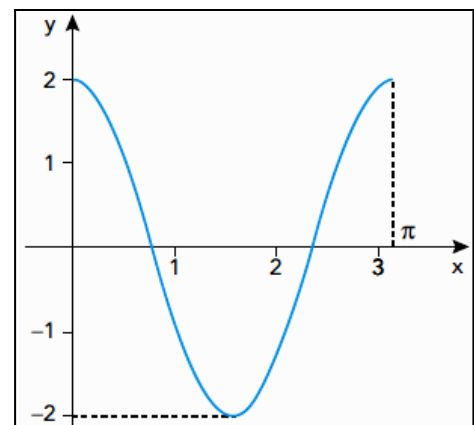
8. (UERJ) Considere a função real  $f$ , de variável real  $x$ , definida pelo seguinte determinante:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2\cos x & 2 \\ 1 & 2\cos x \end{vmatrix} \text{ para } 0 \leq x \leq \pi. \text{ Observe o gráfico da função } f.$$

Determine os valores de  $x$  para os quais  $f(x) = 1$ .

**Solução.** Calculando o determinante, temos:

$$\begin{aligned} \text{i) } f(x) &= \begin{vmatrix} 2\cos x & 2 \\ 1 & 2\cos x \end{vmatrix} \Rightarrow f(x) = 4\cos^2 x - 2 \\ \text{ii) } f(x) = 1 &\Rightarrow 4\cos^2 x - 2 = 1 \Rightarrow 4\cos^2 x = 3 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \\ \text{iii) } \left\{ \begin{array}{l} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{11\pi}{6} > \pi \rightarrow \text{Fora} \end{cases} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} \\ x = \frac{7\pi}{6} > \pi \rightarrow \text{Fora} \end{cases} \end{array} \right. \\ S &= \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\} \end{aligned}$$

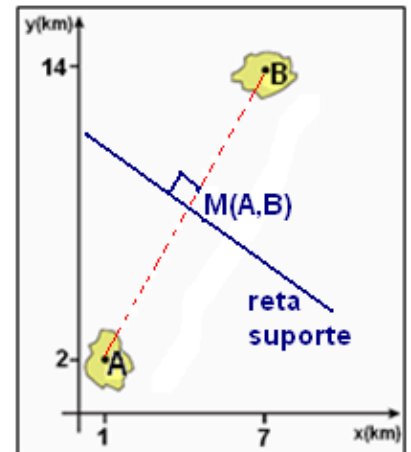


9. (UERJ) Uma ferrovia foi planejada para conter um trecho retilíneo cujos pontos são equidistantes dos centros A e B de dois municípios. Em seu projeto de construção, utilizou-se o plano cartesiano, com coordenadas em quilômetros, em que A = (1,2) e B = (7,14). Observe o gráfico.

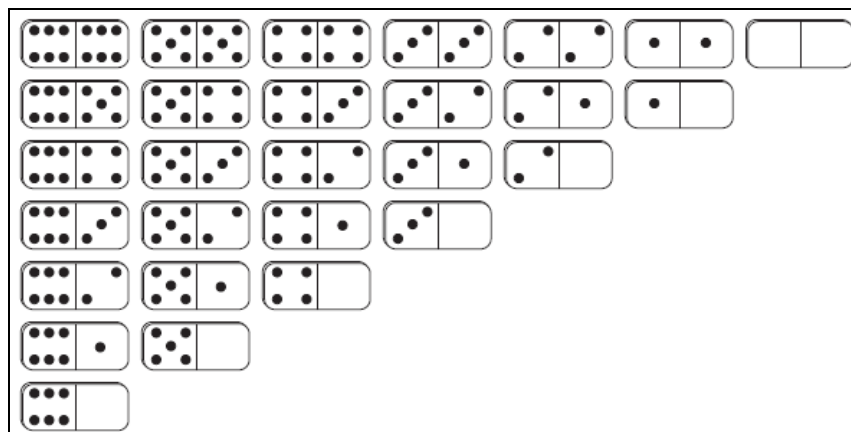
Determine, utilizando esse sistema referencial, a equação da reta suporte desse trecho retilíneo da ferrovia.

**Solução.** A reta suporte será a mediatriz dos pontos A e B. Ela passa pelo ponto médio de AB e é perpendicular à reta que liga A e B.

$$\begin{aligned}
 \text{i) coeficiente(angular) : } m_{AB} &= \frac{14-2}{7-1} = \frac{12}{6} = 2 \\
 \text{ii) Ponto Médio(A,B)} &= \left( \frac{1+7}{2}, \frac{2+14}{2} \right) = (4,8) \\
 \text{iii) reta(suporte) : } m_{\perp}(AB) &= -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{2} \\
 \text{iv) Equação: } &\begin{cases} y = -\frac{x}{2} + n \\ 8 = -\frac{4}{2} + n \Rightarrow n = 8 - 2 = 10 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{x}{2} + 10
 \end{aligned}$$



10. (UERJ) Cada uma das 28 peças do jogo de dominó convencional, ilustradas abaixo, contém dois números, de zero a seis, indicados por pequenos círculos ou, no caso do zero, por sua ausência.



Admita um novo tipo de dominó, semelhante ao convencional, no qual os dois números de cada peça variem de zero a dez. Observe o desenho de uma dessas peças:



Considere que uma peça seja retirada ao acaso do novo dominó. Calcule a probabilidade de essa peça apresentar um número seis ou um número nove.

**Solução 1.** Observe que com o valor máximo sendo 6, há  $7 + 6 + 5 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$  peças. Logo, se houver valor máximo 10, teremos  $(11 + 10 + 9 + 8) + 28 = 38 + 28 = 66$  peças.

Comparando ainda com o exemplo, temos que cada valor aparece 7 vezes, sendo uma peça interseção de dois valores. No caso de 66 peças, há onze peças com número 6, onze peças com número 9 e uma peça contendo 6 e 9. Logo há  $11 + 11 - 1 = 21$  peças com 6 ou 9.

A probabilidade será:  $P(6 \text{ ou } 9) = \frac{21}{66} = \frac{7}{22}$

**Solução 2.** Há 11 números para serem distribuídos em 2 espaços:  $C(11,2)$ . Além disso há 11 peças em que os dois espaços possuem os mesmos números. Utilizando cálculos combinatórios, temos:

$$\begin{aligned}
 n(\Omega) &= C_{11}^2 + 11 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9!}{2 \cdot 9!} + 11 = 55 + 11 = 66 \\
 P(6 \text{ ou } 9) &= \frac{11}{66} + \frac{11}{66} - \frac{1}{66} = \frac{21}{66} = \frac{7}{22}
 \end{aligned}$$