	PROFESSORES: MARCOS JOSÉ / WALTER TADEU **Exame Discursivo - 2025**	

Matemática - GABARITO

1. (UERJ) Um atleta consome diariamente 3 ovos médios, comprados em embalagens com exatamente 30 ovos, ao custo de 15 reais. Ele verificou que consumiria a mesma quantidade de nutrientes comendo diariamente apenas 2 ovos grandes, comprados em embalagens com exatamente 10 ovos, ao custo de 6 reais. Calcule a diferença, em reais, entre os valores gastos pelo atleta, em 30 dias, ao trocar o consumo diário de 3 ovos médios por 2 ovos grandes.

Solução. Com os ovos médios, o atleta precisa de 3 embalagens pois em 30 dias ele consome 90 ovos. Como cada cartela custa 15 reais, o custo mensal seria de R$ 15,00 x 3 = R$ 45,00.
Com os ovos grandes, ele consome, em 30 dias, 60 ovos. Necessitaria comprar 6 embalagens com 10 ovos em cada. Logo, o custo mensal seria de R$ 6,00 x 6 = R$ 36,00.
A diferença seria, portanto, R$ 45,00 – R$ 36,00 = R$ 9,00.

2. (UERJ) Observe na tabela a seguir dados aproximados da área territorial e do número de habitantes de cinco municípios do estado do Rio de Janeiro, de acordo com o Censo de 2022.

MUNICÍPIOS	POPULAÇÃO	ÁREA TERRITORIAL (km^2)
Arraial do Cabo	31000	155
Casimiro de Abreu	46000	460
Maricá	198000	360
Rio das Ostras	156000	220
Saquarema	90000	360

Adaptado de ibge.gov.br.

Sabe-se que a densidade demográfica de um município é calculada pela razão entre sua população e sua área territorial. Calcule a maior e a menor densidade demográfica, em habitantes/km^2, do conjunto de municípios apresentados.

Solução. Calculando as respectivas razões, temos que a menos densidade é de Casemiro de Abreu e a maior, Rio das Ostras.

MUNICÍPIOS	POPULAÇÃO	ÁREA TERRITORIAL (km^2)	DENSIDADE (hab/km^2)	
Arraial do Cabo	31000	155	200	
Casemiro de Abreu	46000	460	100	Menor
Maricá	198000	360	550	
Rio das Ostras	156000	220	709,1	Maior
Saquarema	90000	360	250	

3. (UERJ) Uma pessoa realizou um empréstimo de x reais e já pagou $\frac{3}{4}$ desse valor, que correspondem a R$ 1.050,00. Foi acordado que a dívida a ser paga corresponderá a $\frac{13}{7}$ de x. Calcule o valor total, que será pago a mais do que o empréstimo realizado.

Solução. Temos que 3x/4 = 1 050. Logo, 3x = 4.(1050) => x = $\frac{4.(1050)}{3}$ = 4.(350) = R$ 1 400,00.
A dívida a ser paga será 13(1 400)/7 = 13.(200) = R$ 2 600,00.
Logo, será pago a mais o valor de (2 600 – 1 400) = R$ 1 200,00.

4. (UERJ) Considere a equação 2X + B − 2A = A.B e, também, as matrizes: A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ Calcule a matriz X.

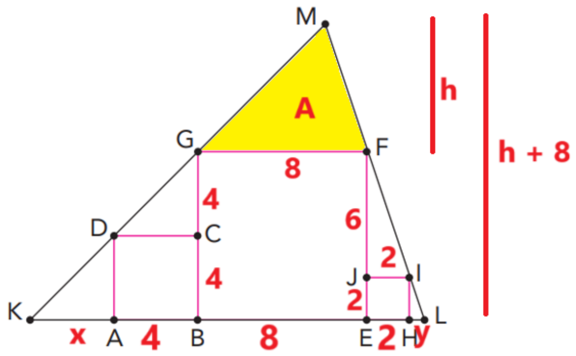
Solução. Encontrando os termos para operação, temos: 2X = 2A – B + A.B

i) 2A = $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ **ii) A.B =** $\begin{bmatrix} 3.1 + 1.0 & 3.2 + 1.(-1) \\ 2.(1) + (-1).0 & 2.(2) + (-1).(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

iii) 2A – B + A.B = $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

iv) 2X = $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ **=> X =** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5/2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

5. (UERJ) Os quadrados ABCD, BEFG e EHIJ têm os lados AB, BE e EH contidos na base KL do triângulo KLM, ilustrado a seguir. Os pontos D e G pertencem ao lado KM, e os pontos I e F ao lado LM, do mesmo triângulo.



São conhecidas as seguintes medidas: AB = 4 cm, BE = 8 cm e EH = 2 cm. Calcule, em cm², a área do triângulo GFM.

Solução. Observando as medidas na figura, temos:

i) KA = x mede 4, pois DC é base média de KBG.

ii) Os triângulos JIF e IHL são semelhantes: $\frac{6}{2} = \frac{2}{y}$ **=> y =** $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

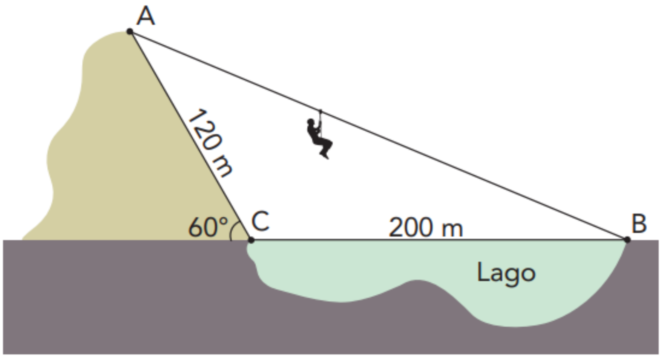
iii) A base KL mede, portanto, 4 + 4 + 8 + 2 + 2/3 = 56/3.

v) Os triângulos KLM e GFM são semelhantes. Estabelecendo a relação entre alturas e bases, temos:

$\frac{h}{h+8} = \frac{8}{\frac{56}{3}} => \frac{56h}{3}$ **– 8h = 64 => 56h – 24h = 192 => 32h = 192 => h = 6.**

Logo, A = $\frac{(8).(6)}{2}$ **= 24 cm².**

6. (UERJ) Uma tirolesa foi instalada sobre um lago, conforme indica o esquema:



Considere as seguintes informações:

• o triângulo ABC encontra-se no plano vertical;

• AC representa uma rampa de 120 m, que forma um ângulo de 60º com o plano horizontal;

• BC é a extensão do lago, que mede 200 m.

Sabendo que cos 60º = $\frac{1}{2}$, calcule a distância, em metros, de A até B.

Solução. O ângulo ACB mede 120º. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ACB, temos:

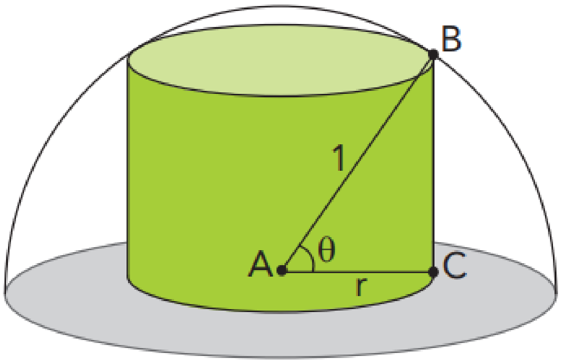
$(AB)^2 = (120)^2 + (200)^2 - 2.(120).(200).\cos 120^0$

$(AB)^2 = 14\,400 + 40\,000 - 2.(120).(200).\left(-\frac{1}{2}\right)$

$(AB)^2 = 54\,400 + 24\,000$

$AB = \sqrt{78\,400} = 280$ m

7. (UERJ) Um cilindro circular reto está contido em uma semiesfera de raio AB = 1, como ilustra a imagem. O raio AC da base desse cilindro mede r e o ângulo agudo BÂC mede θ graus.



Calcule a altura e a área lateral do cilindro em função de θ. Em seguida, calcule o valor de θ para que essa área seja máxima.

Solução. O triângulo ABC é retângulo em C. Calculando r pela relação do cosseno, temos que r = cosθ e a altura BC = senθ, visto que a hipotenusa vale 1. Dessa forma, temos:

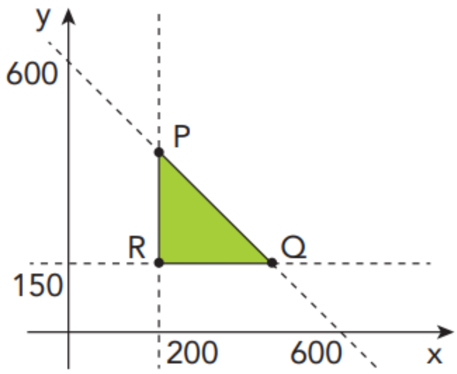
i) Altura do cilindro = senθ. **ii) Área lateral = 2.π.r.h = 2.π.senθ.cosθ = π.sen(2θ).**

iii) a área será máxima quando sen2θ = 1 => 2θ = 90º => θ = 45º.

8. (UERJ) Uma doceira, que vende trufas de cerejas e de nozes, tem a encomenda fixa semanal de 200 trufas de cerejas (C) e de 150 de nozes (N). Se houver demanda, ela consegue fazer, no máximo, 600 trufas por semana. Os lucros por unidade vendida de C e N são, respectivamente, R$ 4,00 e R$ 3,00. Considerando que a doceira faça, por semana, x unidades de C e y de N, valem as seguintes desigualdades:

$$\begin{cases} x \geq 200 \\ y \geq 150 \\ x + y \leq 600 \end{cases}$$

Os pares (x, y) de números de trufas que essa doceira pode fazer estão representados, no plano cartesiano, por pontos do triângulo PQR. Observe:



Calcule, em reais, o lucro de apenas uma encomenda fixa semanal. Calcule, em reais, também, o lucro semanal máximo que a doceira pode obter com a venda de 600 trufas.

Solução. O lucro da encomenda fixa será L = 4.(200) + 3.(150) = 800 + 450 = R$1 250,00.

O lucro máximo na venda de 600 trufas será quando x + y = 600 apresentar o máximo do que dá mais lucro. No caso as de cereja (x). O máximo, respeitando os limites é x = 450 e y = 150.

Logo L(máx) = 4.(450) + 3.(150) = 1800 + 450 = R$2 250,00.

9. (UERJ) Considere a sequência dos números naturais ímpares e as somas S_1 e S_2:

$$(a_n) = (1, 3, 5, 7, \ldots)$$
$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$
$$S_2 = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots + a_{2n}$$

S_1 é a soma dos n primeiros números ímpares e S_2 é a soma dos n números ímpares seguintes. Calcule S_2 e, também, a razão $\frac{S_1}{S_2}$.

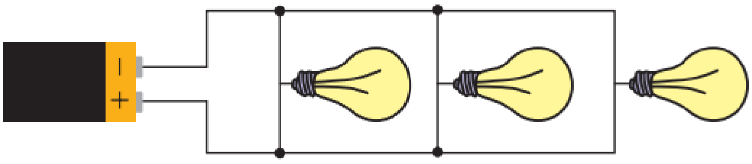
Solução. Utilizando a fórmula da Progressão Aritmética de razão 2, temos:

i) $a_n = 1 + (n-1).2 = 2n - 1$. Logo, $S_1 = \frac{(1+2n-1).n}{2} = \frac{(2n).n}{2}$;

ii) $a_{n+1} = 1 + (n+1-1).2 = 2n + 1$. Dessa forma $a_{2n} = 2n + 1 + (n-1).2 = 4n - 1$

Logo, $S_2 = \frac{(2n+1+4n-1).n}{2} = \frac{3(2n).n}{2}$. A razão pedida é: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{(2n).n/2}{3.(2n).n/2}$ = 1/3.

10. (UERJ) Em um circuito de três lâmpadas iguais ligadas em paralelo, se uma delas queimar, as outras duas ainda permanecem acesas. Sabe-se que, ao conectar o circuito a uma bateria, a probabilidade de qualquer uma dessas lâmpadas queimarem é igual a 20%. Observe o esquema:



Calcule a probabilidade de, ao conectar o circuito, pelo menos duas lâmpadas queimarem.

Solução. As probabilidades são:

i) 2 queimarem: $(Q)(Q)(NQ).3!/2 = (0,2)^2.(0,8).3 = 0,096$;

ii) 3 queimarem: $(0,2)^3 = 0,008$

Logo P(pelo menos 2 queimarem) = 0,096 + 0,008 = 0,104 = 10,4%.