|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **PROF. WALTER TADEU**  **Matemática I** | http://brasil.indymedia.org/images/2008/09/427871.jpg |  |

**Aula 5 – Progressões Geométricas: Soma – 20 / 3 / 2020 - Gabarito**

**Parte 1**.

1. Calcule a soma dos 8 primeiros termos da PG (1, 2, 4, 8, ...).

**Solução. O primeiro termo é 1 e a razão é q = (2 ÷ 1) = 2.**

**Utilizando a fórmula, temos: S8 = 256 -1 = 255.**

2. Em uma PG de razão 2, a soma dos 8 primeiros termos é 765. Encontre o valor do primeiro termo dessa PG.

**Solução. Utilizando a fórmula, temos: S8 = 255.a1 = 765 => a1 = 765 ÷ 255 = 3.**

3. A soma dos infinitos termos da sequência é . Determine o número real **x**.

**Solução. A razão é q = . Utilizando a fórmula, temos:**

**S∞ = 5x = 25 => x = 5.**

4. Considere um PG oscilante (an), com a1 = 3 e a5 = . Determine a soma dos infinitos termos dessa PG.

**Solução. Calculando a razão (q < 0), pois é oscilante e substituindo na fórmula, temos:**

**i) q = .**

**ii) S∞ = .**

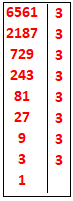
5. Escreva a PG cuja razão é e a soma dos cinco primeiros termos é 422.

**Solução. Calculando o primeiro termo, temos:**

**i) S5 =**

**ii) PG = .**

**Parte 2**.

1. (FEI) Dada a progressão geométrica 1, 3, 9, 27, ... se a soma é 3 280, então ela apresenta:

a) 9 termos **b)** 8 termos c) 7 termos d) 6 termos e) 5 termos

# Solução. A razão é q = (3 ÷ 1) = 3. Utilizando a fórmula, temos:

**Sn =**

# 2. (PUC-SP) A soma dos n primeiros termos da sequência (6, 36, 216, …, 6n, …) é 55 986.

# Nessas condições, considerando log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48, o valor de log n é:

# a) 0,78 b) 1,08 c) 1,26 d) 1,56 e) 1,68

# Solução. A razão é q = (36 ÷ 6) = 6. Utilizando a fórmula, temos:

**i) Sn =**

**ii) PG = .**

3. (PUC-PR) Em uma progressão geométrica infinitamente decrescente, cuja soma é igual a 9 e a soma dos quadrados de todos seus termos é 40,5, o seu 4º termo vale:

a) b) c) **d)** e)

**Solução. Como a PG é decrescente, |q| < 1, logo converge. Considerando x, seu primeiro termo e utilizando as informações, temos:**

**i)**

**ii)**

**iii)**

**.**

**iv) . Logo, .**

4. (UNITAU) A soma dos termos da sequência é:

**a)** 15.10 – 1  b) – 3.10 – 1 c) 15.10 – 2 d) 5.10 – 1 e)

**Solução. Calculando a razão, temos:**

**i) . ii) S∞ = .**

5. Se a1, a2, a3, ...a10 é uma sequência de números inteiros tal que a1 = 1 para n > 1 e an+1 – an = 3n então o valor de a10 é:

**a)** 29 524 b) 88 572 c) 265 719 d) 9 840 e) 3 279

# Solução. Utilizando as informações, temos:

# . Logo, 29 524.

# 6. Na última páscoa, a direção de um campus do IF- Sul solicitou que cada servidor doasse caixas de bombons para serem entregues a 16.000 alunos de baixa renda das escolas da região. Supondo-se que o primeiro servidor doou uma caixa; o segundo doou 2; o terceiro, 4 e assim sucessivamente até o décimo quinto servidor, é possível afirmar que o total de caixas de bombons arrecadadas foram suficientes para doar exatamente:

# a) uma para cada aluno.

# b) duas para cada aluno.

# c) uma para cada aluno e ainda sobraram 767 caixas de bombons.

# d) duas para cada aluno e ainda sobraram 767 caixas de bombons.

# e) Três para cada aluno e ainda sobraram caixas de bombons.

# Solução. A razão da PG (1, 2, 4, ...) é q = 2. Encontrando o total de caixas doadas, temos:

**i)**

**ii) Dividindo pelos alunos, temos: 32 767 ÷ 16 000 = 2 sobrando 767.**

# 

# 7. (UECE 2017) Seja f: IR → IR uma função tal que f(nx) = [f(x)]n para todo número inteiro n e todo número real x. Se f(1) = 3, então 0 valor da soma f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) é:

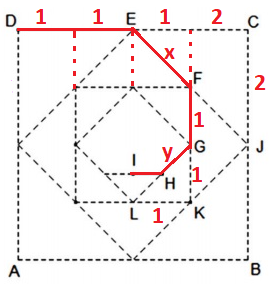
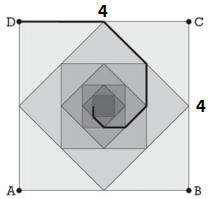
# a) 4 568 b) 2 734 c) 3 117 d) 3 279 e) 3 318

# Solução. Utilizando as informações, temos:

# . Os valores formam uma PG de razão q = (27 ÷ 9) = 3.

# Logo, .

8. A partir do quadrado ABCD, de lado 4, constrói-se uma sequência infinita de novos quadrados, cada um com vértices nos pontos médios dos lados do anterior, como abaixo:



O comprimento da poligonal infinita destacada na figura por linhas mais grossas é igual a:

a) b) c) **d)** e) 8

# Solução. Encontrando o padrão da sequência, temos:

# 1º segmento: 2; 2º segmento: ; 3º segmento: ;

# 4º segmento: ; 5º segmento: ....

**Os comprimentos estão em PG infinita de razão q = .**

**A soma é: S∞ = .**

9. (USF 2016) Pensando em montar seu próprio consultório, Nathália começou a economizar desde que entrou no curso de Medicina. Ao passar no vestibular, ela ganhou R$ 5 000,00 de seus pais e os aplicou a uma taxa de 0,5% ao mês a juros compostos. Além disso, mensalmente, ela depositou R$ 100,00 à mesma taxa de juros compostos. Hoje, passados 5 anos, ou seja,60 meses, qual o montante do rendimento dos R$ 5 000,00 e qual o valor economizado por Nathália com suas aplicações mensais?

(Considere 1,00560 = 1,35)

**a)** R$ 6 750,00 e R$ 7 000,00 b) R$ 6 500,00 e R$ 7 800,00 c) R$ 6 500,00 e R$ 7 000,00

d) R$ 6 750,00 e R$ 7 800,00 e) R$ 7 800,00 e R$ 6 500,00

**Solução. Após 60 meses, temos:**

**i) Montante da aplicação de R$5.000,00: M = 5 000.(1 + 0,005)60 = 5 000.(1,35) = R$6 750,00.**

**ii) Depósitos: =>**

**.**

10. Uma clínica de emagrecimento desafiou seus pacientes, um de cada vez, a perderem juntos um total de 1 023 kg. O primeiro paciente emagreceu 1 kg, o segundo 2 kg, o terceiro 4 kg, e assim sucessivamente. Quantos pacientes participaram do desafio?

a) 8 b) 9 **c)** 10 d) 11 e) 12

# Solução. As massas perdidas estão em PG de razão 2: (1, 2, 4, ..., 2n – 1). Temos:

**.**

11. (UDESC 2019) O objetivo de um concurso era criar o ser vivo matemático mais curioso. O vencedor, batizado por seus criadores de *Punctorum Grande*, possuía as seguintes características: no seu nascimento ele era composto apenas por um ponto, e após 40 minutos duas hastes saíam deste ponto com um novo ponto. Após mais 40 minutos, outras duas hastes, com um novo ponto em cada, saíam de cada um dos pontos existentes e assim sucessivamente a cada 40 minutos.

O número de pontos que esse ser vivo tinha após cinco horas e vinte minutos do seu nascimento, era:

**a)** 6 561    b) 255    c) 2 187    d) 4 347    e) 64

# Solução. Cinco horas e vinte minutos correspondem a (5 x 60 + 20) = 320 minutos. Logo, 8 períodos de 40 minutos. Observando a evolução do ser vivo a cada período, temos.

# 

# O número de pontos no oitavo período será 38 = 6 561.

# 12. (IFCE 2016) O valor do número x dado por:

# é:

# a) b) c) d) e)

# Solução. A partir do terceiro termos, temos uma PG de razão 1/10. Utilizando a fórmula, temos:

# .

# 13. (UFRGS 2016) Considere o padrão de construção representado pelos triângulos equiláteros abaixo:

# 

# O perímetro do triângulo da etapa 1 é 3 e sua altura é h; a altura do triângulo da etapa 2 é metade da altura do triângulo da etapa 1; a altura do triângulo da etapa 3 é metade da altura do triângulo da etapa 2 e, assim, sucessivamente. Assim, a soma dos perímetros da sequência infinita de triângulos é:

# a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6.

# Solução. Os triângulos equiláteros são semelhantes e a razão entre os lados é a mesma entre seus perímetros e altura. Logo, o perímetro do triângulo da etapa 2 é 3/2, o da etapa 3 é 3/4 e assim sucessivamente. Os perímetros, portanto, formam uma pg. Calculando a soma infinita, temos:

# 3 x 2 = 6.

# 14. (IFPE 2018) Dudu quer se tornar um youtuber famoso, mas, em seu primeiro vídeo, ele obteve apenas 5 inscritos em seu canal. Obstinado que é, Dudu pretende, a cada novo vídeo, dobrar a quantidade de inscritos em seu canal. Se no primeiro mês ele postar 10 vídeos e conseguir atingir a meta estabelecida, ao fim deste mês, seu canal terá?

# a) 1 024 inscritos b) 5 120 inscritos c) 5 115 inscritos d) 1 023 inscritos e) 310 inscritos

**Solução. Considerando a1 = 5, serão colocados mais nove vídeos e a razão da progressão geométrica será 2. Calculando o número de inscritos no décimo vídeo e a soma de todos ao fim do mês, temos:**

**i) ;**

**ii)**

15. (UFRGS 2018) Considere a função real f definida por f(x) = 2 – x.

O valor da expressão S = f(0) + f(1) + f(2) + ... + f(100) é:

# 

# a) 2 – 2 – 101 b) 250 + 2 – 50 c) 2 + 2 – 101 d) 2 + 2 – 100 e) 2 – 2 – 100

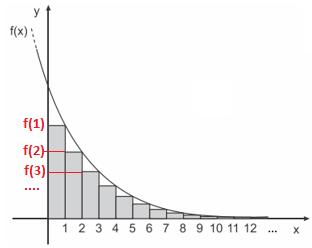
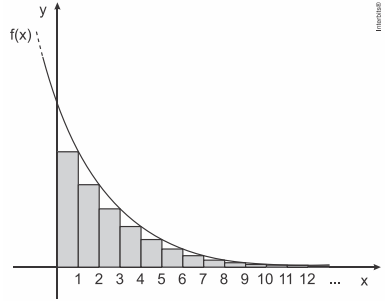
# 

**Solução. Encontrando alguns valores e o padrão, temos:**

**.**

**Logo, f(1) + f(2) + ... + f(100) = 2.(2 – 2 – 101) = 2 – 2 – 100.**

16. (ESPM 2017) A figura abaixo representa parte do gráfico da função , fora da escala.



A soma das áreas infinitas dos retângulos assinalados é igual a:

**a)** 16 b) 8 c) 24 d) 32 e) 12

# Solução. Todos os retângulos possuem bases de mesma medida 1. As alturas serão os valores da função nos pontos 1, 2, 3, ... etc. As áreas serão os produtos das bases pelas alturas.

# i) f(1) =; f(2) =; f(3) =;

**ii) A1 + A2 + A3 + ... = (1). PG com q = 1/2.**

**iii) A1 + A2 + A3 + ... = 16.**

# 17. (CESGRANRIO 1999) O professor G. Ninho, depois de formar uma progressão aritmética de 8 termos, começando pelo número 3 e composta apenas de números naturais, notou que o 2º, o 4º e o 8º termos formavam, nessa ordem, uma progressão geométrica. G. Ninho observou ainda que a soma dos termos dessa progressão geométrica era igual a:

# a) 42 b) 36 c) 32 d) 28 e) 24

# Solução. A progressão aritmética formada foi: (3, 3 + r, 3 + 2r, 3 + 3r, 3 + 4r, 3 + 5r, 3 + 6r, 3 + 7r).

# Como o 2º, 4° e 8º termos estão em PG, temos entre esses três termos, que o central é a média geométrica dos extremos.

# (3 + 3r)2 = (3 + r).(3 + 7r) => 9 + 18r + 9r2 = 9 + 24r + 7r2 => 2r2 – 6r = 0 => 2r.(r – 3) = 0 => r = 0 ou r = 3.

# A razão não pode ser nula, pois nesse caso a PA seria constante. Logo, r = 3.

# Dessa forma, 2º termo = 3 + 3 = 6, 4º termo = 3 + 3.(3) = 12 e 8º termo = 3.(3) + 7 = 16.

# 

# A soma pedida é: 6 + 12 + 24 = 42.

# 18. (ESPCEX/AMAN 2011) Um menino, de posse de uma porção de grãos de arroz, brincando com um tabuleiro de xadrez, colocou um grão na primeira casa, dois grãos na segunda casa, quatro grãos na terceira casa, oito grãos na quarta casa e continuou procedendo desta forma até que os grãos acabaram, em algum momento, enquanto ele preenchia a décima casa. A partir dessas informações, podemos afirmar que a quantidade mínima de grãos de arroz que o menino utilizou na brincadeira é:

# a) 480 b) 511 c) 512 d) 1023 e) 1024

# Solução. A quantidade de grãos mínima deve ser maior que a soma das potências de 2 que permitem preencher nove casas completas. Na casa um, temos 20 = 1 e na casa nove, 28 = 256. Temos:

# 20 + 21 + 22 + 23 + ....+ 28 = = 512 – 1 = 511. Como ele começou a preencher a 10° casa, precisaria no mínimo de 511 + 1 = 512 grãos no total para que essa situação ocorresse.

# 19. (UFRGS 2017) Na figura abaixo, encontram-se representados quadrados de maneira que o maior quadrado (Q1) tem lado 1. O quadrado Q2 está construído com vértices nos pontos médios dos lados de Q1; o quadrado Q3 está construído com vértices nos pontos médios dos lados de Q2 e, assim, sucessiva e infinitamente. A soma das áreas da sequência infinita de triângulos sombreados na figura é:

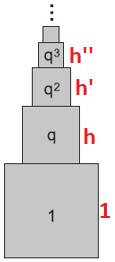
# a) b) c) d) e)

# Solução. Os triângulos sombreados são triângulos retângulos isósceles e suas áreas valem a metade do produto de seus catetos. Temos:

# i) A1 = ;

# ii) Cateto para A2: = => A2 = .

# iii) As áreas estão em PG de razão 1/2. Logo, .

****20. (UEFS 2016) Se infinitos quadrados, cujas áreas formam uma progressão geométrica decrescente de razão q, pudessem ser empilhados, como na figura, e o quadrado da base tivesse uma área de 1m², a altura, em m, seria?

a) b) c) **d)** e) infinita

**Solução. Se a área do quadrado da base é 1, sua base e altura são iguais a 1.**

**No segundo quadrado se a área é q, e sua altura é h, então h2 = q => h = .**

**No terceiro quadrado, se a área é q2 e sua altura é h’, então (h’)2 = (q2)2 => h’ = q.**

**No quarto quadrado, (h’’)2 = q3 => h’’ = .**

**As alturas, portanto, formam a PG: , .... de razão .**

**Parte 3**.

1. (UERJ 2017) Em uma atividade nas olimpíadas de matemática de uma escola, os alunos largaram, no sentido do solo, uma pequena bola de uma altura de 12 m. Eles observaram que, cada vez que a bola toca o solo, ela sobe e atinge 50% da altura máxima da queda imediatamente anterior.

Calcule a distância total, em metros, percorrida na vertical pela bola ao tocar o solo pela oitava vez.

**Solução. Inicialmente a bola percorrer 12 m até o 1º toque. A partir desse toque ela percorrer duas vezes uma distância (subida e descida) sempre metade da anterior.**

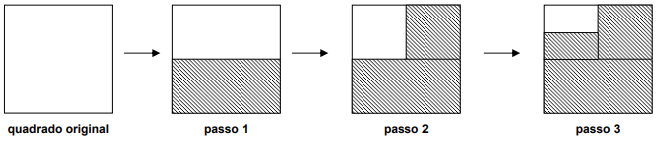
**1º toque: sobe 12/2 m e desce 12/2 m. 2º toque: sobe 12/4 m e desce12/4 m.**

**3º toque: sobe 12/8 m e desce 12/8 m. .... 8° toque: sobe 12/28 m e desde 12/28 m.**

**A distância total é:**

**12 + 3.(8) = 12 + 24 = 36 m.**

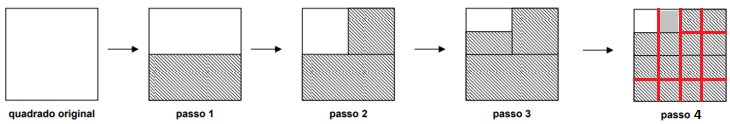
2. (UFPR 2010) Um quadrado está sendo preenchido como mostra a sequência de figuras abaixo:



No passo 1, metade do quadrado original é preenchido. No passo 2, metade da área não coberta no passo anterior é preenchida. No passo 3, metade da área não coberta nos passos anteriores é preenchida, e assim por diante.

a) No passo 4, que percentual do quadrado original estará preenchido?

**Solução. Observando a figura e a divisão da figura em 16 quadradinhos, menores, temos que a fração preenchida é de 15/16 ou 0,9375 que equivale a 93,75%.**

****

**Calculando em esse valor por somas de PG, temos que a cada etapa há um acréscimo constante.**

**Esse acréscimo é a metade do que não foi preenchido.**

**Original: nenhum preenchimento.**

**Passo 1: preenche ; Sobra 1/2.**

**Passo 2: preenche ; Sobra 1/4.**

**Passo 3: ; Sobra 1/8.**

**Passo 4: = 0,9375 = 03,75%.**

b) Qual é o número mínimo de passos necessários para que 99,9% do quadrado original seja preenchido?

**Solução. Observando o padrão temos que o passo n terá como preenchimento.**

**Calculando, temos: ≤ 99,9% => 2n – 1 ≤ 0,999.2n => (0,001).2n ≤ 1 => 2n ≤ =>**

**=> 2n ≥ 1000 => n ≥ 10. O mínimo é n = 10.**

3. (UFES 2010) Uma tartaruga se desloca em linha reta, sempre no mesmo sentido. Inicialmente, ela percorre 2 metros em 1 minuto e, a cada minuto seguinte, ela percorre 4/5 da distância percorrida no minuto anterior.

a) Calcule a distância percorrida pela tartaruga após 3 minutos.

**Solução. De acordo com as informações, temos:**

**- 1° minuto: 2 m; - 2° minuto: x 2 = m; - 3° minuto: x = m;**

**Logo, após 3 minutos ela percorre: 2 + m.**

b) Determine uma expressão para a distância percorrida pela tartaruga após um número inteiro *n*de minutos.

**Solução. De acordo com as informações, temos que a distância percorrida no minuto n é d = 2..**

**Logo, a soma das distâncias será: 10..**

c) A tartaruga chega a percorrer 10 metros? Justifique sua resposta.

**Solução. Não. Observe que (4/5)n < 1. Logo S < 10.**

d) Determine o menor valor inteiro de *n*tal que, após *n*minutos, a tartaruga terá percorrido uma distância superior a 9 metros. [Se necessário, use log 2 = 0,30.]

**Solução. Utilizando a expressão geral da soma, temos:**

**10. > 9 =>**

**=> . Logo, valor mínimo é n = 11.**

4. (UFC 2009) A progressão geométrica infinita (a1, a2, ..., an, ...) tem razão q = e a1 = 1.

Determine o menor inteiro positivo n tal que Sn, a soma dos primeiros termos da progressão, satisfaz à desigualdade .

**Solução. Utilizando a fórmula, temos:**

**=> n > 13. Logo, n = 14.**

5. (FGV 2006) Um atleta corre 1 000 metros numa direção, dá meia-volta e retorna metade do percurso; novamente dá meia-volta e corre metade do último trecho; torna a virar-se e corre metade do trecho anterior, continuando assim indefinidamente.

a) Quanto terá percorrido aproximadamente esse atleta, desde o início, quando completar o percurso da oitava meia-volta?

**Solução. Em cada sentido ele percorre a metade da distância anterior, formando uma PG decrescente de razão q = 1/2. Temos: S = 1 000 – (1/2).(1 000) + (1/2)2.(1 000) – (1/2)3.(1 000) + ... + (1/2)8. (1 000).**

**S = 2 000. ≈ 2 000.(0,998) = 1 996,10 m**

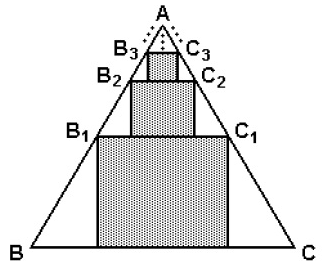
b) Se continuar a correr dessa maneira, indefinidamente, a que distância do ponto de partida inicial o atleta chegará?

**Solução. Considerando o sentido positivo a direção da primeira corrida e negativo a volta, temos uma PG alternada com razão q = – 1/2. Temos:**

**S = 1 000 – (1/2).(1 000) + (1/2)2.(1 000) – (1/2)3.(1 000) + ... = m.**

**Parte 4**.

1.Na figura a seguir, o triângulo ABC é equilátero de lado igual a 1.



Considere o retângulo com dois vértices sobre a base BC e cujos outros dois vértices, B1 e C1 são os pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente. No triângulo AB1C1, considere o retângulo com dois vértices sobre a base B1C1 e cujos outros dois vértices, B2 e C2 são os pontos médios dos lados AB1 e AC1, respectivamente. Continuando este processo indefinidamente, obtém-se uma sequência de retângulos. A soma das áreas totais de todos os retângulos assim obtidos é igual a:

a) b) c) **d)** e)

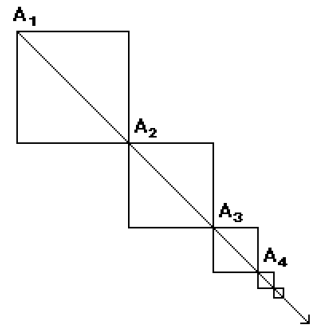
**Solução. Como B1 e C1 são pontos médios, então B1C1 = 1/2 e a altura do retângulo de base B1C1 é h1 = . Logo, sua área será A1 = .**

**No retângulo de base B2C2 = 1/4 e altura h2 = , temos: A2 = .**

**As áreas formarão uma progressão geométrica de razão 1/4.**

**A soma infinita dessas áreas será: S = .**

2. Em uma semirreta de origem A1 marcam-se os pontos A2, A3, ... de maneira que os segmentos A1A2, A2A3, ... sejam consecutivos e suas medidas formem, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão 1/2, em que A1A2‚ = 1dm. Considere a sequência de quadrados que têm como diagonais os segmentos A1A2, A2A3, ...conforme a figura a seguir, desenhada sem escala.



a) Demonstre que as áreas desses quadrados formam uma progressão geométrica de razão 1/4.

**Solução. Os segmentos são as diagonais dos quadrados. Calculando as áreas, temos:**

**.**

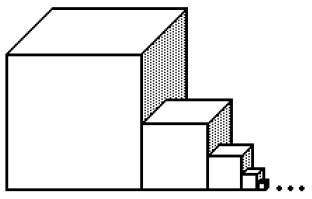
b) Determine a medida do lado do primeiro quadrado dessa sequência cuja área é menor que 1/100 dm2.

**Solução. Os segmentos são as diagonais dos quadrados. Calculando as áreas, temos:**

**.**

**.**

3. Na figura abaixo, a aresta do cubo maior mede a, e os outros cubos foram construídos de modo que a medida da respectiva aresta seja a metade da aresta do cubo anterior. Imaginando que a construção continue indefinidamente, a soma dos volumes de todos os cubos será:

a)  b) c) **d)** e)

**Solução. O volume dos cubos formou uma PG decrescente:**

**. Logo, S∞ = .**

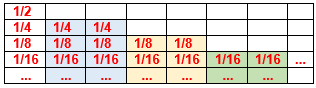
4. Determine os limites das somas:

a)

**Solução. Há duas sequências diferentes. Temos:**

b)

**Solução 1. Reescrevendo, de acordo com a tabela, temos:**

****

**.**

**Solução 2. Multiplicando a soma por (1/2), temos:**

c)

**Solução. Multiplicando a soma por (x), temos:**

d)

**Solução. Há três sequências nesta soma. Reorganizando, temos:**