COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
(Casa de Thomaz Coelho/1889)

CONCURSO DE ADMISSÃO À 1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO 2005/2006

PROVA DE MATEMÁTICA

22 DE OUTUBRO DE 2005

MATEMÁTICA - GABARITO

(Prof. Walter Tadeu Nogueira da Silveira – www.professorwaltertadeu.mat.br)

Questão 1. Racionalizando o denominador da fração $\dfrac{5}{\sqrt[6]{16}+\sqrt[6]{196}+\sqrt[3]{49}}$, obtemos:

(A) $3+\sqrt[3]{2}$ (B) $3-\sqrt[3]{2}$ **(C)** $\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}$ (D) $5+\sqrt[3]{5}$ (E) $7+\sqrt[3]{2}$

Solução. Utilizando as propriedades da potenciação e radiciação, temos:

i) $(a^2+ab+b^2).(a-b)=a^3+a^2b-a^2b+ab^2-ab^2-b^3=a^3+0+0-b^3=a^3-b^3$.

ii) $\dfrac{5}{\sqrt[6]{4^2}+\sqrt[6]{14^2}+\sqrt[3]{49}}=\dfrac{5}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{49}}=\dfrac{5}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2.7}+\sqrt[3]{7^2}}=\dfrac{5}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2+\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{7}+\left(\sqrt[3]{7}\right)^2}$.

iii) Aplicando (i) em (ii), vem: $\dfrac{5}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2+\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{7}+\left(\sqrt[3]{7}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}}\right)=\dfrac{5.\left(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}\right)}{\left(\sqrt[3]{7}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}=$

$=\dfrac{5.\left(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}\right)}{7-2}=\dfrac{5.\left(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}\right)}{5}=\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}.$

Questão 2. Uma das raízes da equação $ax^2+bx-3=0$ é -1. Sabendo que os coeficientes a e b são números positivos e primos, podemos afirmar que a^2+b^2 é igual a :

(A) 3. (B) 6. (C) 11. (D) 15. **(E)** 29.

Solução. Se $x=-1$ é raiz, então $a.(-1)^2+b.(-1)^2-3=0 \Rightarrow a-b=3$.

Dois números primos e positivos que diferem de 3 unidades, são 5 e 2. Logo, $a^2+b^2=5^2+2^2=25+4=29$.

Questão 3. Efetuando o produto $\mathbf{(1-a+a^2-a^3+...+a^{96}-a^{97}+a^{98}-a^{99}+a^{100}).(1+a)}$, encontramos:

(A) $1+a^{101}$ (B) $a+a^{101}$ (C) $a+a^2+a^3+...+a^{99}+a^{100}+a^{101}$

(D) $a-a^2+a^3-a^4+...+a^{99}-a^{100}+a^{101}$ (E) $1+a+a^2+a^3+...+a^{99}+a^{100}+a^{101}$

Solução. Organizando a soma em parcelas verticais, temos:

$$
\begin{array}{rr}
 & 1-a+a^2-a^3+...+a^{96}-a^{97}+a^{98}-a^{99}+a^{100} \\
\hline
 & \times\ (1+a) \\
\hline
 & a-a^2+a^3-a^4+...+a^{97}-a^{98}+a^{99}-a^{100}+a^{101} \\
+ & 1-a+a^2-a^3+...+a^{96}-a^{97}+a^{98}-a^{99}+a^{100} \qquad \\
\hline
 & 1+0+0+.....................................+0+0+0+a^{101}
\end{array}
$$

Questão 4. Parado no ponto, Thiago viu três ônibus passarem: um era amarelo, um vermelho e um branco. Um deles ia para a Zona Norte, um para a Zona Leste e o outro para a Zona Sul, mas não necessariamente nessa ordem. Aproveitando a lentidão do trânsito, Thiago pôde contar o número de ocupantes de cada veículo. O ônibus amarelo tinha o dobro de ocupantes do vermelho, que, por sua vez, tinha o triplo de ocupantes do branco. O que ia para a Zona Sul levava 25 pessoas a mais do que o destinado à Zona Norte. Qual a combinação correta a respeito desses ônibus?

(A) Ônibus amarelo, com 30 pessoas, ia para a Zona Sul.

(B) Ônibus vermelho, com 30 pessoas, ia para a Zona Sul.

(C) Ônibus branco, com 5 pessoas, ia para a Zona Leste.

(D) Ônibus vermelho, com 15 pessoas, ia para a Zona Norte.

(E) Ônibus amarelo, com 25 pessoas, ia para a Zona Sul.

Solução. Supondo o número de ocupantes do branco como x, temos que o vermelho levava 2x ocupantes e o amarelo 6x ocupantes.

O ônibus que vai para a Zona Sul levava 25 pessoas a mais do que o destinado à Zona Norte. Logo, o destinado à Zona Sul não será o branco, pois é o que possui menos ocupantes entre os três. Temos:

i) Zona Sul é amarelo e Zona Norte é vermelho: 6x – 2x = 25 => 4x = 25. Não satisfaz, pois 25 não é múltiplo de 4. Logo, o que vai para a Zona Norte é o branco.

ii) Zona Sul é amarelo e Zona Norte é branco: 6x – x = 25 => 5x = 25 => x = 5. Então, o branco leva 5 pessoas e vai para a Zona Norte, o vermelho, com 10 ocupantes vai para a Zona Leste e o amarelo com 30 pessoas vai para a Zona Sul.

Questão 5. Três números são divisíveis por 7 e por 11 e não são divisíveis por nenhum outro número primo. Sabe-se que cada um deles possui 15 divisores diferentes da unidade. Então, o produto dos três números é:

(A) $11^7 \times 7^{11}$. (B) 77. **(C)** 77^{11}. (D) $11^{11} \times 7^7$. (E) 11^{77}.

Solução. Considere M, N e P os números. Se seus divisores primos são somente 7 e 11 e possuem 15 divisores diferentes da unidade. Logo possuem no total 16 divisores, então, suas decomposições são do tipo: $7^a.11^b$, onde temos a relação: (a + 1).(b + 1) = 16. O produto 16 tem como possibilidades 8 x 2 ou 4 x 4, pois 16 x 1 indicaria que 11 ou 7 não estariam na decomposição. Dessa forma, a = b = 3, a = 1 e b = 7 ou a = 7 e b = 1.

$M = 7^3.11^3$; $N = 7^1.11^7$; $P = 7^7.11^1$.

O produto é $M.N.P = (7^3.11^3) \times (7^1.11^7) \times (7^7.11^1) = 7^{3+1+7} \times 11^{3+7+1} = 7^{11} \times 11^{11} = (7 \times 11)^{11} = 77^{11}$.

Questão 6. Um certo trabalho é feito por 16 tratores iguais em 10 dias, cada um deles trabalhando 10 horas por dia. Após dois dias de trabalho, 6 tratores apresentaram defeitos, não podendo mais serem utilizados. Quantas horas por dia deverão trabalhar os demais tratores, prevendo que ocorrerá um atraso de 8 dias para o término do trabalho?

(A) 6 h. **(B)** 8 h. (C) 10 h. (D) 12 h. (E) 15 h.

Solução. Calculando o que foi feito do trabalho em 2 dias, temos:

Tratores	Dias	H/d	Trabalho
16	10	10	T
16	2	10	x
Direta	Direta	Direta	

$\frac{T}{x} = \frac{16}{16} \cdot \frac{10}{2} \cdot \frac{10}{10} \Rightarrow \frac{T}{x} = \frac{5}{1} \Rightarrow x = \frac{T}{5}$. **Após 2 dias faltam, ainda, $\frac{4T}{5}$ para terminar.**

Restariam, a princípio, 8 dias. Mas com atraso de 8 dias, o tempo total passa a ser de 16 dias. Temos:

Tratores	Dias	H/d	Trabalho
16	10	10	T
10	16	x	4T/5
Inversa	Inversa		Direta

$\frac{10}{x} = \frac{T}{4T/5} \cdot \frac{16}{10} \cdot \frac{10}{16} \Rightarrow \frac{10}{x} = \frac{1}{4/5} \Rightarrow \frac{10}{x} = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{40}{5} = 8h/d$.

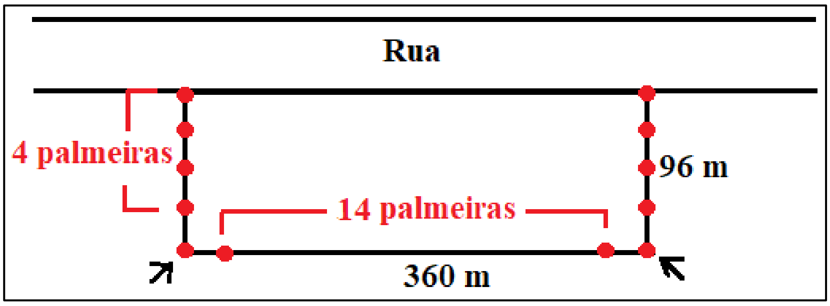
Questão 7. As dimensões de um terreno retangular são **96 m × 360 m**, sendo que um dos lados de maior dimensão está se limitando com a rua. O proprietário deseja plantar palmeiras em todo o perímetro do terreno, de modo que a distância entre elas seja igual e a maior possível, exceto no lado que se limita com a rua, que só terá palmeiras nas duas extremidades. Então, o número necessário de palmeiras para esse plantio é:

(A) 23. **(B)** 24. (C) 25. (D) 38. (E) 40.

96	360	2
48	180	2
24	90	2
12	45	2
6	45	2
3	45	3
1	15	3
1	5	5
1	1	

Solução. A distância maior possível e comum às duas dimensões corresponde ao valor de MDC(96, 360) = 2^3 x 3 = 24 m.

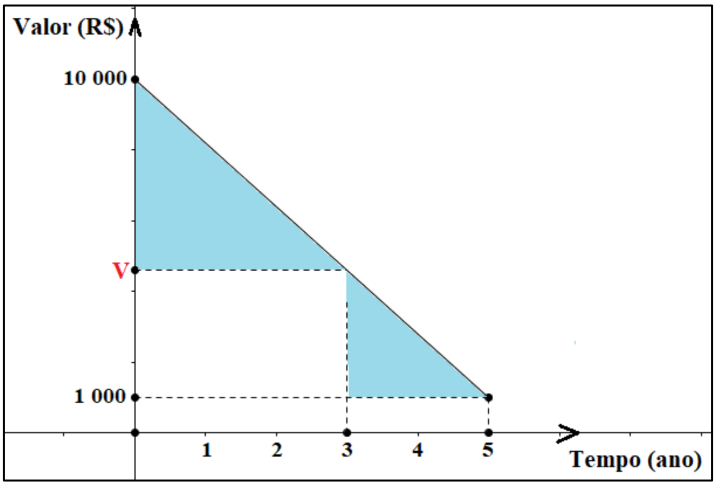
Desta forma na maior dimensão haverá (360 ÷ 24) + 1 = 16 palmeiras e na dimensão menor, haverá (96 ÷ 24) + 1 = 5 palmeiras. Em cada extremidade é colocada uma palmeira. Então são colocadas, (2 x 4 + 14) + 2 = 22 + 2 = 24 palmeiras. Observe o esquema abaixo.



Questão 8. - O valor de uma máquina decresce linearmente com o tempo, devido ao desgaste. Sabendo-se que, hoje, ela vale 10 000 reais e, daqui a 5 anos, 1 000 reais, o seu valor, em reais, daqui a 3 anos, será:

(A) 3 600. (B) 4 200. **(C)** 4 600. (D) 5 000. (E) 5 400.

Solução. A situação pode ser representada no gráfico de uma função afim decrescente.
Utilizando a semelhança nos triângulos destacados, temos:



$$\frac{10\,000-V}{3-0}=\frac{V-1\,000}{5-3} \Rightarrow \frac{10\,000-V}{3}=\frac{V-1\,000}{2} \Rightarrow 20\,000-2V=3V-3\,000 \Rightarrow 5V=23\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V=\frac{23\,000}{5}=\text{R\$ }4\,600{,}00.$$

Questão 9. Uma senhora, julgando-se extremamente gorda, resolveu fazer uma dieta, com acompanhamento médico, e perdeu, nos três primeiros meses, 30 % do seu peso; entretanto, nos três meses seguintes, ela aumentou seu peso em 40 %, em relação ao final do primeiro trimestre. No decorrer desse semestre, o peso dessa senhora, relativamente ao início do tratamento:

(A) diminuiu 2 %. (B) diminuiu 10 %. (C) manteve seu valor. (D) aumentou 10 %. (E) aumentou 16 %.

Solução. Considerando P seu peso no início da dieta, ao fim de três meses seu peso era 30% menor ou 70% do início. Isto é, passou a pesar 0,7P. Nos três com ganho de 40% sobre esse peso, passou a ter (1,4).(0,7P) = 0,98P.

Dessa forma, em relação ao peso inicial P ela diminuiu (P – 0,98P) = 0,02P = 2%P.

O CUSTO DE UMA EMBALAGEM ATRAENTE

Do mesmo modo que, ao darmos um presente, procuramos colocá-lo em um embrulho bem bonito, para valorizá-lo, nas prateleiras dos supermercados, os fabricantes procuram apresentar seus produtos em embalagens cada vez mais atraentes, para despertar a atenção dos clientes compradores. No comércio, a apresentação estética é tão importante que o Sebrae (Serviço Brasileiro de Apoio às Micro e Pequenas Empresas) lançou uma linha de crédito exclusivamente para ajudar os pequenos fabricantes a aprimorar as embalagens dos seus produtos. Na prática, para o cliente, muitas vezes as embalagens têm custo maior que os produtosnelas contidos, como pode ser observado nos exemplos abaixo.

Custo da embalagem em relação ao preço de venda do produto (em porcentagem)

Fontes: Sebrae, Associação Brasileira de Embalagens, Gulliver e fabricantes

Questão 10. Lara foi ao supermercado e comprou 25 garrafas de água mineral por R$ 30,00, valor esse que está de acordo com os dados indicados no quadro anterior. Suponha que o valor pago exclusivamente pela água mineral nessa compra permaneça o mesmo, mas que o custo da embalagem passe a corresponder a 70 % do preço de venda do produto (água + embalagem). Nestas novas condições, quanto deve custar cada garrafa de água mineral nesse supermercado?

(A) 23 centavos. (B) 31 centavos. (C) 36 centavos. **(D)** 60 centavos. (E) 84 centavos.

Solução. Cada garrafa custou na compra (30 ÷ 25) = R$ 1,20.

O preço da embalagem corresponde a 85% de R$1,20 = 0,85 x 1,20 = R$ 1,02.

Dessa forma o preço da água, somente, corresponde a (R$ 1,20 – R$ 1,02) = R$ 0,18.

O novo preço da embalagem será E, de forma que $\frac{E}{E+água} = 0,7 \Rightarrow \frac{E}{E+0,18} = 0,7 \Rightarrow 0,7E + 0,126 = E \Rightarrow$

$\Rightarrow 0,3E = 0,126 \Rightarrow E = \frac{0,126}{0,3} =$ **R$ 0,42.**

A garrafa de água mineral (água + embalagem) deve custar R$ 0,18 + R$ 0,42 = R$ 0,60.

Questão 11. Dados dois números naturais, sabe-se que o maior excede o menor em 3 unidades e que o **MDC** e o **MMC** deles são, respectivamente, 3 e 60. A soma desses dois números é:

(A) 21. (B) 24. **(C)** 27. (D) 30. (E) 33.

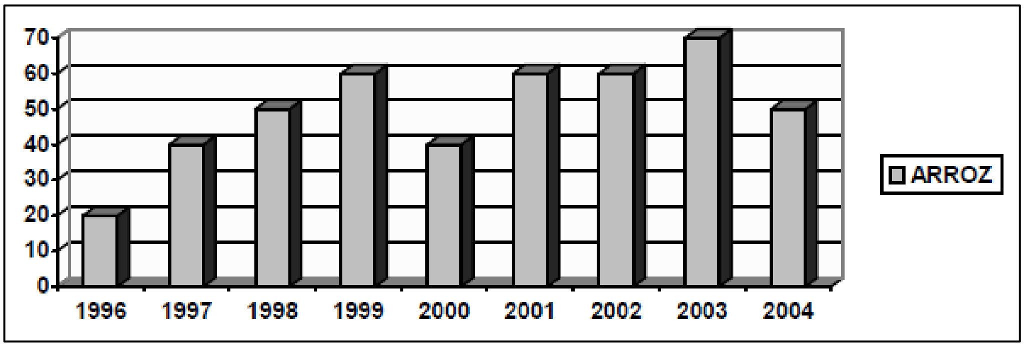
Solução. Considerando a e b os números, o produto do MMC (a, b) pelo MDC (a, b) é igual ao produto entre a e b. Isto é, MDC (a, b) x MDC (a, b) = a.b.

Dessa forma, temos: $\begin{cases} a - b = 3 \\ a.b = (3).(60) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 3 \to a = b + 3 \\ a.b = 180 \end{cases} \Rightarrow b.(b+3) = 180 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 + 3b - 180 = 0 \Rightarrow b = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4(1).(-180)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{-3 \pm 27}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{-3+27}{2} = 12 \\ b = \frac{-3-27}{2} = -15 \end{cases}.$

Como os números são naturais, b > 0. Logo, b = 12 e a = 12 + 3 = 15. A soma é 12 + 15 = 27.

Questão 12. Analisando o gráfico abaixo, que representa, em milhares de toneladas, a produção de arroz de certa localidade, desde 1996 até 2004, observa-se que essa produção:



(A) foi crescente de 1996 a 2001.

(B) em 1997, foi 50 % maior que em 1996.

(C) em 1 999, teve acréscimo de 30 % em relação ao ano anterior.

(D) a partir de 2001, foi crescente.

(E) teve média de 50 mil toneladas ao ano.

Solução. Analisando as afirmativas, temos:

(A) Falsa. Em 2000 houve um decréscimo em relação aos anos de 19978 e 1999.

(B) Falsa. A produção em 1997 dobrou em relação à produção de 1996. Logo, foi 100 % maior.

(C) Falsa. De 50 para 60 temos 60/50 = 1,2. Logo, aumento de 20 %.

(D) Falsa. Não houve aumento em 2002 e houve decréscimo em 2004.

(E) Verdadeira. $\frac{20+40+50+60+40+60+60+70+50}{9}=\frac{20+80+100+180+70}{9}=\frac{450}{9}$ **= 50 (em milhares).**

Questão 13. Dada a equação $x^4+4x^2-45=0$, podemos afirmar que:

(A) tal equação possui 4 raízes reais.

(B) duas de suas raízes são números racionais.

(C) a soma das suas raízes reais é igual a -4.

(D) o produto das suas raízes reais é igual a -5.

(E) o produto das suas raízes reais é igual a -45.

Solução. Resolvendo a equação biquadrada, temos:

i) Substituindo $x^2=y$ **e** $x^4=y^2$**, temos:** $y^2+4x-45=0 \Rightarrow (y-5).(y+9)=0 \Rightarrow \begin{cases} y_1=5 \\ y_2=-9 \end{cases}$.

ii) $y_1=5 \Rightarrow x_1=\sqrt{5}$ **e** $x_2=-\sqrt{5}$; $y_2=-9 \Rightarrow$ **não existe x real.**

Dessa forma a equação só admite duas raízes reais e o produto delas é $(\sqrt{5}).(-\sqrt{5})=-5$.

Questão 14. O gráfico da função f, indicado na figura abaixo, é formado por três segmentos dereta, que são partes dos gráficos das seguintes funções:

– uma função constante, definida por y = 4;

– a função identidade;

– uma função do primeiro grau, definida por $y=-2x+16$. Sobre essa função f, é FALSO afirmar que:

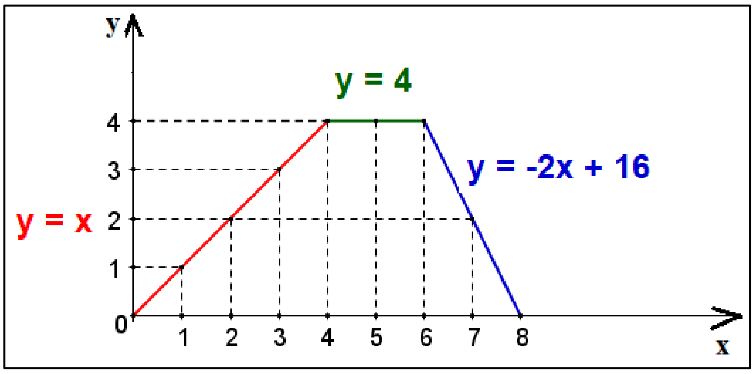
(A) **f(1) + f(2) = f(3)**.

(B) **f(2) = f(7)**.

(C) **f(6) . f(8) = f(0)**.

(D) **f(4) – f(3) = f(1)**.

(E) **f(2) + f(3) = f(5)**.



Solução. Observando as funções e as imagens indicadas, temos:

(A) Verdadeira. f(1) + f(2) = 1 + 2 = 3 = f(3).

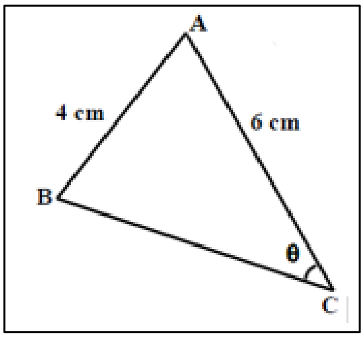
(B) Verdadeira. f(2) = f(7) = 2.

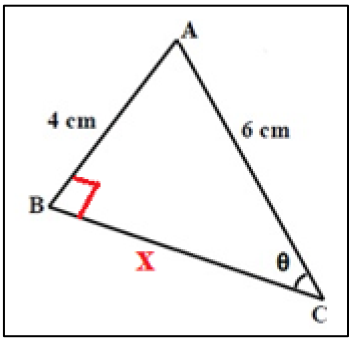
(C) Verdadeira. f(6).f(8) = (4).(0) = 0 = f(0).

(D) Verdadeira. f(4) – f(3) = 4 – 3 = 1 = f(1).

(E) Falsa. $f(2)+f(3)=2+3=5\neq f(5)=4$.

Questão 15. No triângulo ABC da figura, tem-se que $\overline{AB}$ = 4 cm, $\overline{AB}$ = 6 cm e $\widehat{BCA} = \theta$. Qual a área do triângulo, em cm^2, quando a medida do ângulo **θ** for a maior possível?





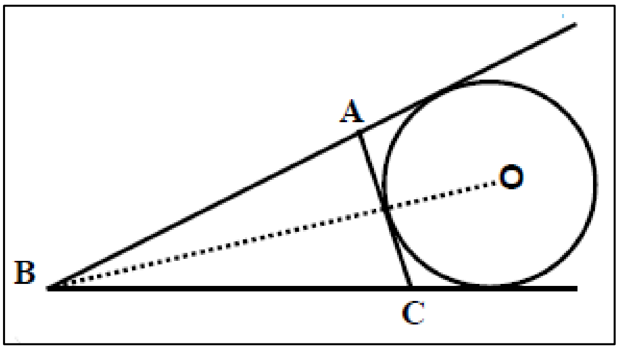
(A) 3 **(B)** $4\sqrt{5}$ (C) 10 (D)$7\sqrt{5}$ (E) $8\sqrt{5}$

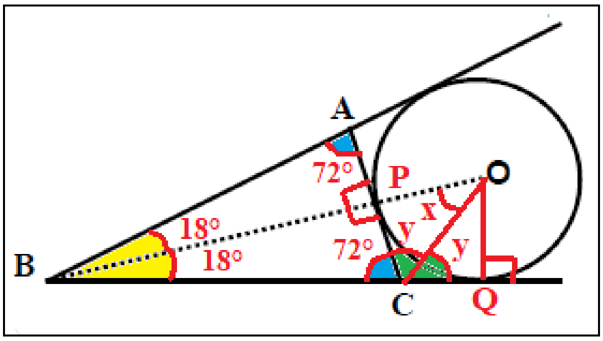
Solução. A inclinação máxima de AC e consequentemente, θ máximo se dará quando o ângulo $\widehat{ABC}$ = 90°. Dessa forma o triângulo ABC é retângulo. Temos:

i) x = $\sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20}$ = $2\sqrt{5}$.

ii) A área do triângulo será o semi produto dos catetos. Logo, A = $\frac{(4).(2\sqrt{5})}{2}$ = $4\sqrt{5}$ cm^2.

Questão 16. Na figura, o círculo de centro O é tangente a $\overline{AC}$ **,** no ponto de interseção de $\overline{AC}$ com $\overline{BO}$**,** e às retas BA e BC. Sabendo que **BÂC = 72º,** então **CÔB** mede:





(A) 32º. **(B)** 36º. (C) 45º. (D) 48º. (E) 72º.

Solução. A reta $\overline{BO}$ é bissetriz do ângulo $\widehat{ABC}$. Pela propriedade da tangência, o ângulo $\widehat{APB} = 90°$ e $\overline{AP} = \overline{PC} = \overline{CQ}$. Dessa forma o complemento de 72° vale 18° e o suplemento de 72° que vale 108° é dividido em dois ângulos iguais a y pelo segmento $\overline{OC}$.

Temos que 2y = 108°, o que implica que y = 54°.

O ângulo CÔB será x = 180° - (18° + 72° + 54°) = 180° - 144° = 36°.

Questão 17. Na figura abaixo, foram marcados 5 arcos, de mesmo centro e igualmente espaçados entre si. A soma dos comprimentos desses arcos é igual ao comprimentoda circunferência de raio R. Qual a medida do ângulo central, comum aos arcos?

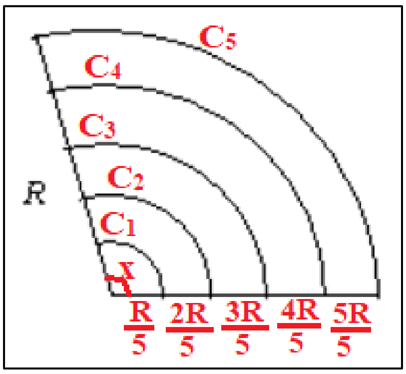
(A) $\frac{2\pi}{3}$ rad. (B) $\frac{3\pi}{4}$ rad. (C) $\frac{3\pi}{2}$ rad. (D) $\frac{5\pi}{6}$ rad. (E) $\frac{\pi}{4}$ rad.

Solução. De acordo com a informação dada e o ângulo central <u>x</u>, temos:

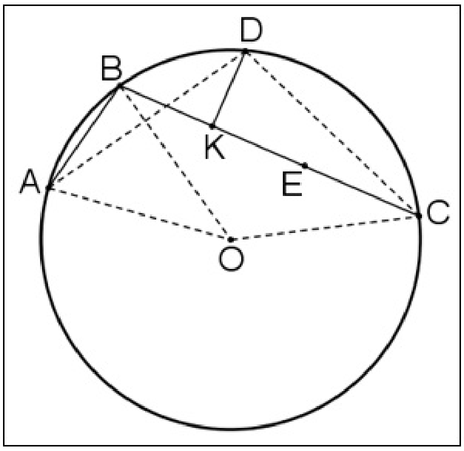
i) $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 = 2.\pi.R$;

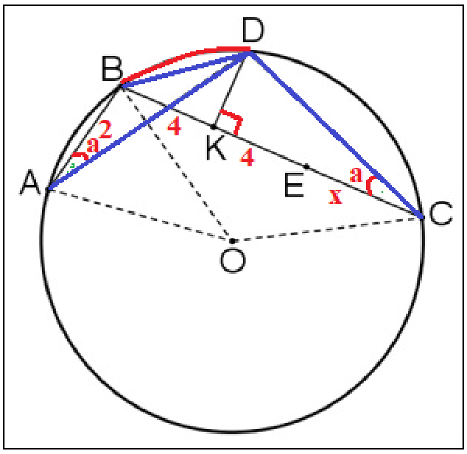
ii) $x.\frac{R}{5} + x.\frac{2R}{5} + x.\frac{2R}{5} + x.\frac{4R}{5} + x.\frac{4R}{5} = x.\frac{15R}{5}$;

iii) $x.\frac{15R}{5} = 2.\pi.R \Rightarrow x = \frac{10.\pi}{15} = \frac{2.\pi}{3}$.



Questão 18. Sejam três pontos A, B e C pertencentes a uma circunferência de centro O tais que $\widehat{AOB} < \widehat{BOC}$. Seja, ainda, D o ponto médio do arco $\widehat{AC}$ que contém o ponto B. Sobre $\overline{BC}$, marcam-se o ponto K (pé da perpendicular a $\overline{BC}$ por D) e o ponto E, distante 8 dm do ponto B. Se $\overline{AB}$ = 2 dm e $\overline{BK}$ = 4 dm, a medida de $\overline{EC}$ é:





(A) 1 dm. **(B)** 2 dm. (C) 3 dm. (D) 4 dm. (E) 6 dm.

Solução 1. O ponto D é médio do arco $\widehat{AC}$ e, portanto, os segmentos AD e DC possuem a mesma medida. Temos ainda que os ângulos $\widehat{BAD}$ e $\widehat{BCD}$ são congruentes, pois são inscritos do mesmo arco $\widehat{BD}$.

Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos ABD e BDC, considerando x a medida procurada, temos:

i) $\begin{cases} (BD)^2 = 2^2 + (AD)^2 - 2.(2).(AD).cos(a) \\ (BD)^2 = (8+x)^2 + (CD)^2 - 2.(8+x).(CD).cos(a) \end{cases}$**. Lembrando que (AD) = (DC).**

ii) $4 + (AD)^2 - 4.(AD).\cos(a) = (8 + x)^2 + (AD)^2 - 2.(8 + x).(AD).\cos(a) \Rightarrow$

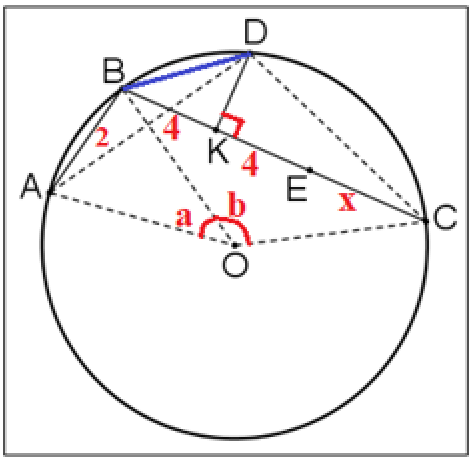
$\Rightarrow 4 - 4.(CD).\cos(a) = (8 + x)^2 - 2.(8 + x).(CD).\cos(a) \Rightarrow (8 + x)^2 - 4 = [2.(8 + x) - 4].(CD).\cos(a).$

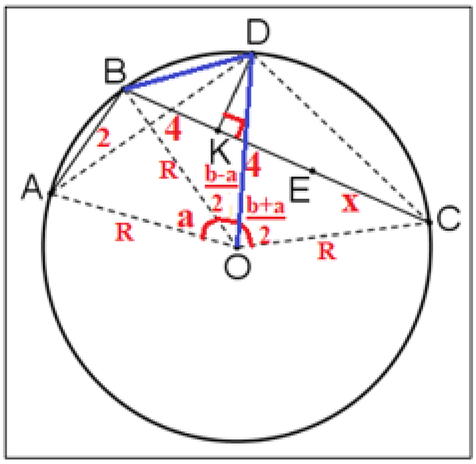
iii) No triângulo CDK, temos que $\cos(a) = \dfrac{4+x}{CD}$**. Logo,** $(8 + x)^2 - 4 = [2.(8 + x) - 4].(CD).\left(\dfrac{4+x}{CD}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow (8 + x)^2 - 4 = [2x + 12].(4 + x) \Rightarrow 64 + 16x + x^2 - 4 = 8x + 2x^2 + 48 + 12x \Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 6).(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2$**, pois $x = -6$ não satisfaz. Dessa forma, $\overline{EC}$ = 2 dm.**

Solução 2. Como D é ponto médio do arco AC, temos as medidas indicadas.





i) Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ODC, observando que OC = OD = Raio R, temos:

$(DC)^2 = R^2 + R^2 - 2.R.R.\cos\left(\dfrac{b+a}{2}\right) \Rightarrow (DC)^2 = 2R^2.\left[1 - \cos\left(\dfrac{b+a}{2}\right)\right];$

ii) No triângulo DKC: $(DC)^2 = (DK)^2 + (BC - 4)^2 \Rightarrow (DK)^2 + (BC)^2 - 8.(BC) + 16 = 2R^2.\left[1 - cos\left(\frac{b+a}{2}\right)\right]$;

iii) No triângulo BDK, temos: $(BD)^2 = (DK)^2 + 16 \Rightarrow (BD)^2 + (BC)^2 - 8.(BC) = 2R^2.\left[1 - cos\left(\frac{b+a}{2}\right)\right]$;

iv) Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ODB: $(BD)^2 = 2R^2.\left[1 - cos\left(\frac{b-a}{2}\right)\right]$;

v) Substituindo (iv) em (iii), vem: $2R^2.\left[1 - cos\left(\frac{b-a}{2}\right)\right] + (BC)^2 - 8.(BC) = 2R^2.\left[1 - cos\left(\frac{b+a}{2}\right)\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow (BC)^2 - 8.(BC) = 2R^2.\left[1 - cos\left(\frac{b+a}{2}\right)\right] - 2R^2.\left[1 - cos\left(\frac{b-a}{2}\right)\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow (BC)^2 - 8.(BC) = 2R^2\left[cos\left(\frac{b-a}{2}\right) - cos\left(\frac{b+a}{2}\right)\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow (BC)^2 - 8.(BC) = 2R^2.\left[cos\frac{b}{2}.cos\frac{a}{2} + sen\frac{b}{2}.sen\frac{a}{2} - \left(cos\frac{b}{2}.cos\frac{a}{2} - sen\frac{b}{2}.sen\frac{a}{2}\right)\right] \Rightarrow$

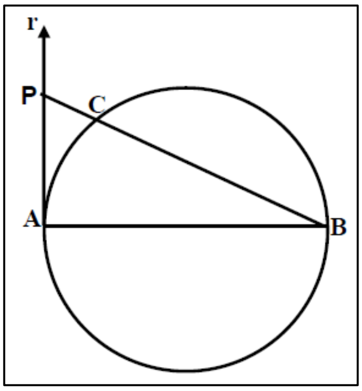
$\Rightarrow (BC)^2 - 8.(BC) = 2R^2.\left[cos\frac{b}{2}.cos\frac{a}{2} + sen\frac{b}{2}.sen\frac{a}{2} - cos\frac{b}{2}.cos\frac{a}{2} + sen\frac{b}{2}.sen\frac{a}{2}\right] \Rightarrow$

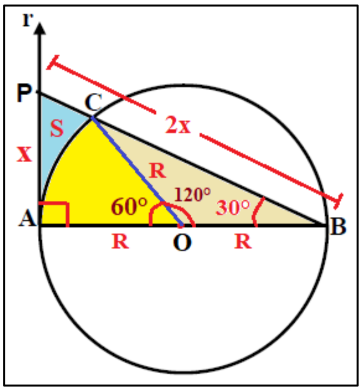
$\Rightarrow (BC)^2 - 8.(BC) = 2R^2.\left[2.sen\frac{b}{2}.sen\frac{a}{2}\right] \Rightarrow (BC)^2 - 8.(BC) = 4.R.\,sen\frac{b}{2}.R\,sen\frac{a}{2}$;

vi) Temos que: $R.\,sen\frac{b}{2} = \frac{\overline{BC}}{2}$ e $R.\,sen\frac{a}{2} = \frac{\overline{AB}}{2} = 1$;

vii) $(BC)^2 - 8.(BC) = \frac{4.\overline{BC}}{2} \Rightarrow (BC)^2 = 8.(BC) + 2(BC) \Rightarrow (BC)^2 = 10.(BC)$. Como $(BC) \neq 0$, podemos cancelar em ambos os membros e temos que $(BC) = 10$ dm. Logo, $4 + 4 + x = 10 \Rightarrow x = \overline{EC} = 10 - 8 = 2$ dm.

Questão 19. Sejam um círculo de diâmetro AB = 2R e r, sua tangente em A . Liga-se um pontoP da reta r ao ponto B, interceptando a circunferência do círculo no ponto C, conforme a figura abaixo. Sabendo que $\overline{AP} = \frac{\overline{PB}}{2}$, calcule a área da região do triângulo PAB situada no exterior do círculo.





(A) $\sqrt{2}.\pi.R^2$ (B) $3\sqrt{2}.\pi.R^2$ (C) $2\sqrt{3}(\pi - \sqrt{2}).R^2$ (D) $\pi.R^2$ (E) $(5\sqrt{3} - 2\pi).\frac{R^2}{12}$

Solução. O triângulo APB é retângulo em A devido à tangente r. Como AP é metade de PB (hipotenusa, está oposto ao ângulo de 30°. Dessa forma o ângulo central vale 60° e seu suplementar, 120°. De acordo com essas informações, temos:

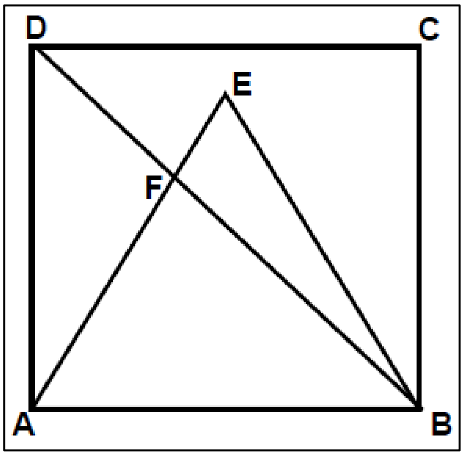
i) $(2x)^2 = x^2 + (2R)^2 \Rightarrow 4x^2 - x^2 = 4R^2 \Rightarrow 3x^2 = 4R^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{4R^2}{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

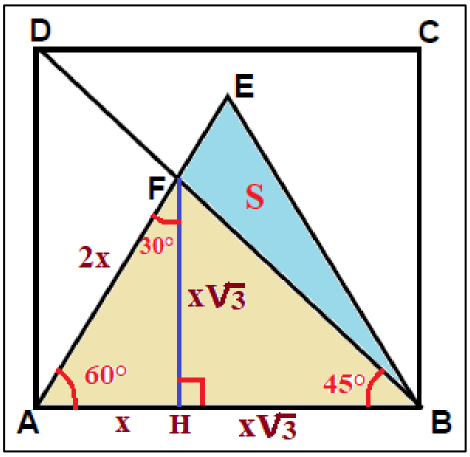
ii) Área do setor circular de 60°: $\frac{\pi.R^2}{6}$. iii) Área do Δ(COB): $\frac{R.R.sen120°}{2} = \frac{R^2.\left(\sqrt{3}/2\right)}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

iv) Área do Δ(APB): $\frac{\left(2R\sqrt{3}/3\right).(2R)}{2} = \frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$.

iv) Área S (pedida): $\frac{2R^2\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi.R^2}{6}\right) = \frac{8R^2\sqrt{3} - 3R^2\sqrt{3} - 2\pi R^2}{12} = (5\sqrt{3} - 2\pi).\frac{R^2}{12}$.

Questão 20. Na figura, o triângulo ABE é equilátero e tem lado $\overline{AB}$ em comum com o quadrado ABCD. O ponto F é a interseção da diagonal $\overline{BD}$ do quadrado com o lado $\overline{AE}$ do triângulo. Se a medida do lado $\overline{AB}$ é $(1 + \sqrt{3})$ cm, então a área do triângulo BEF, em cm², mede:





(A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) $\sqrt{2} - 1$

Solução. Traçando FH, altura do triângulo AFB, identificamos dois triângulos retângulos.

Considerando AH = x, oposto ao ângulo de 30°, temos que AF = 2x e FH = $x.\sqrt{3}$.

Como AB = $1 + \sqrt{3}$, temos que: $1 + \sqrt{3} = x + x\sqrt{3}$ => x = 1. Logo, FH = $\sqrt{3}$ cm.

A área do triângulo equilátero é $\frac{(1+\sqrt{3})^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{(1+2\sqrt{3}+3).\sqrt{3}}{4} = \frac{(4+2\sqrt{3}).\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}+3}{2}$.

A área do triângulo ABF é $\frac{(1+\sqrt{3}).\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+3}{2}$.

A área S, pedida, é: Área (ABE) – Área (ABF) = $\frac{2\sqrt{3}+3}{2} - \frac{\sqrt{3}+3}{2} = \frac{2\sqrt{3}+3-\sqrt{3}-3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm².