COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
(Casa de Thomaz Coelho/1889)
CONCURSO DE ADMISSÃO À 1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO 2006/2007
PROVA DE MATEMÁTICA
21 DE OUTUBRO DE 2006

MATEMÁTICA - GABARITO
(Prof. Walter Tadeu Nogueira da Silveira – www.professorwaltertadeu.mat.br)

Questão 1. O produto da multiplicação $\left(1-\frac{1}{3}\right).\left(1-\frac{1}{4}\right).\left(1-\frac{1}{5}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{10^{10}}\right)$ pode ser indicado por:

(A) 0,2 x 10^{-9} (B) 0,8 x 10^{-9} (C) 0,5 x 10^{-10} (D) 0,8 x 10^{-10} (E) 0,9 x 10^{-10}

Solução. Efetuando as operações nos parenteses e simplificando, temos:

$$\left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{3}{4}\right).\left(\frac{4}{5}\right)\ldots\left(\frac{10^{10}-1}{10^{10}}\right)=\left(\frac{2}{1}\right).\left(\frac{1}{1}\right).\left(\frac{1}{1}\right).\ldots.\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{10^{10}}\right)=\frac{2}{10^{10}}=\frac{2}{10.10^{9}}=\frac{0{,}2}{10^{9}}=0{,}2\text{ x }10^{-9}.$$

Questão 2. Dividindo $60^2.10^{-1}$ por b obtém-se quociente 6 e resto r, sendo b e r dois números naturais. Determine a soma dos valores possíveis para b.

(A) 254 (B) 386 (C) 408 **(D)** 504 (E) 614

Solução. O produto $60^2.10^{-1}$ vale $\frac{3600}{10}$ = 360. Ele pode ser escrito como 360 = 6.b + r, indicando que o número (360 – r) dividido por b apresenta quociente 6 e resto 0. Sabendo que r < b, pois o resto é menor que o divisor, temos:

i) O maior valor de b é 60, pois 6 x 60 = 360 e no caso r = 0.

ii) O menor valor de b é 52, pois 360 – 6 x 52 = 360 – 312 = 48 e 360 – 6 x 51 = 360 – 306 = 54 > 51.

iii) Dessa forma os possíveis valores de b são: 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59 e 60.

A soma desses números é: (52 + 60) x 4 + 56 = (112) x 4 + 56 = 448 + 56 = 504.

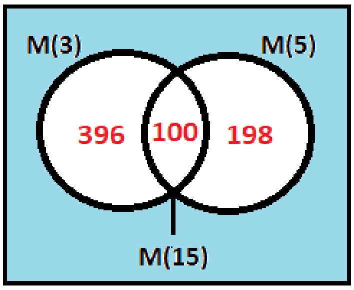
Questão 3. Entre os números inteiros 1 e 100, existem quantas frações irredutíveis cujo denominador é 15?

(A) 692 **(B)** 792 (C) 862 (D) 992 (E) 1 562

Solução. Os numeradores devem ser primos com 15. Ou seja, não devem ter em suas decomposições nenhum divisor de 15. No caso, 3, 5 e 15. Temos:

i) As frações com denominador 15 de 1 a 100 são: $\frac{15}{15},\frac{16}{15},\frac{17}{15},\frac{18}{15},\ldots,\frac{1\,500}{15}$.

ii) Serão desconsideradas as frações onde o númerador for múltiplo de 3 ou 5. Repare que os múltiplos de 15 também são múltiplos de 3 e 5.



- Total de números de 15 a 1 500: (1 500 – 15) + 1 = 1 486;

- N° de múltiplos de 3: $\frac{(1\,500-15)}{3}$: + 1 = $\frac{1\,485}{3}$ + 1 = 495 + 1 = 496;

- N° de múltiplos de 5: $\frac{(1\,500-15)}{5}$: + 1 = $\frac{1\,485}{5}$ + 1 = 297 + 1 = 298;

- N° de múltiplos de 15: $\frac{(1\,500-15)}{15}$: + 1 = $\frac{1\,485}{15}$ + 1 = 99 + 1 = 100;

O número de frações irredutíveis é: 1 486 – (396 + 100 + 198) = 1 486 – 694 = 792.

Questão 4. Qual é o algarismo da ordem das unidades simples do numeral correspondente ao produto da multiplicação 4.3^{2002} escrito com os algarismos do Sistema Decimal de Numeração?

(A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 8 (E) 9

Solução. Para identificar o algarismo da unidade simples, devemos calcular o resto do número na divisão por 10. No caso de produtos, os restos podem ser calculados nos fatores em separado e multiplicados depois, recalculando o resto na divisão por 10, caso necessário.

i) resto de 4 ÷ 10 = 4;

ii) Observando os restos das potências de 3 por 10, temos:

- resto de 3 na divisão por 10 = 3; **- resto de $3^2 = 9$ na divisão por 10 = 9;**

- resto de $3^3 = 27$ na divisão por 10 = 7; **- resto de $3^4 = 81$ na divisão por 10 = 1;**

- resto de $3^5 = 243$ na divisão por 10 = 3; **- resto de $3^6 = 729$ na divisão por 10 = 9;**

Os restos possíveis são 3, 9, 7 e 1. Essa sequência se repete de 4 em 4.

Dividindo 2002 por 4, resulta 500 e resto 2. Logo, $3^{2002} = 3^{(4).500}.3^2$, cujo resto na divisão por 10 é (1).(9) = 9.

iii) O resto, portando, de 4.3^{2002} na divisão por 10 é o resto de (4).(9) = 36 na divisão por 10. Logo, r = 6.

Questão 5. Que termos devem ser retirados da expressão $\mathbf{2^{-1} + 4^{-1} + 6^{-1} + 8^{-1} + 10^{-1} + 12^{-1}}$ para que a soma dos restantes seja igual a 1?

(A) $\mathbf{8^{-1}}$ e $\mathbf{10^{-1}}$ (B) $\mathbf{2^{-1}}$ e $\mathbf{4^{-1}}$ (C) $\mathbf{6^{-1}}$ e $\mathbf{8^{-1}}$ (D) $\mathbf{8^{-1}}$ e $\mathbf{4^{-1}}$ (E) $\mathbf{12^{-1}}$ e $\mathbf{10^{-1}}$

Solução. Representando na forma fracionária e igualando os denominadores, temos:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}=\frac{60}{120}+\frac{30}{120}+\frac{20}{120}+\frac{15}{120}+\frac{12}{120}+\frac{10}{120}=\frac{60+30+20+10}{120}+\frac{15}{120}+\frac{12}{120}=$$

$$=\frac{120}{120}+\frac{15}{120}+\frac{12}{120}=1+\frac{15}{120}+\frac{12}{120}.$$ **Devem, portanto, serem retirados 8^{-1} e 10^{-1}.**

Questão 6. Simplificando $\dfrac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}+\dfrac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}$, encontramos:

(A) 0 (B) 1 (C) $2a^2$ (D) $\sqrt{a^2-1}$ (E) $\sqrt{a^2+1}$

Solução. Racionalizando, temos:

$$\frac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}.\left(\frac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}\right)+\frac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}.\left(\frac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}\right)=$$

$$=\frac{a^2+1+2.\sqrt{(a^2+1).(a^2-1)}+a^2-1}{a^2+1-(a^2-1)}+\frac{a^2+1-2.\sqrt{(a^2+1).(a^2-1)}+a^2-1}{a^2+1-(a^2-1)}=$$

$$=\frac{2a^2}{a^2+1-a^2+1}+\frac{2a^2}{a^2+1-a^2+1}=\frac{2a^2}{2}+\frac{2a^2}{2}=\frac{4a^2}{2}=2a^2.$$

Questão 7. Em 30 dias, 24 operários asfaltam uma avenida de 960 metros de comprimento por 9 metros de largura. Nas mesmas condições de trabalho, quantos operários seriam necessários para fazer o asfaltamento, em 20 dias, de uma avenida de 600 metros de comprimento e 10 metros de largura?

(A) 25 (B) 28 (C) 31 (D) 34 (E) 37

Solução. Analisando as proporcionalidades da regra de três composta, temos:

i) Mantendo as dimensões: Menos dias, mais operários.

ii) Mantendo os dias: Menos comprimento, menos operários.

iii) Mantendo os dias: Mais largura, mais operários.

Operários	Dias	Comprimento	Largura
24	30	960 m	9 m
x	20	600 m	10 m
	Inversa	Direta	Direta

Temos: $$\frac{24}{x}=\frac{20}{30}.\frac{960}{600}.\frac{9}{10} \Rightarrow \frac{24}{x}=\frac{2}{3}.\frac{96}{60}.\frac{9}{10} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{1}.\frac{4}{30}.\frac{3}{10} \Rightarrow x=\frac{300}{12}=25.$$

Questão 8. Para a realização de um concurso seletivo, foram inscritos entre 2 000 e 2 200 candidatos. Sabe-se que, se eles forem distribuídos somente em salas comcapacidades para 40 candidatos cada uma, ou somente em salas com capacidade para 45 candidatos cada uma ou somente em salas com capacidade para 54 candidatos cada uma, sempre haverá necessidade de usar uma outra sala com apenas 20 candidatos. Com base nestas informações, pode-se concluir que o número de candidatos inscritos foi igual a:

(A) 2 020 (B) 2 100 (C) 2 126 (D) 2 160 **(E)** 2 180

40	45	54	2
20	45	27	2
10	45	27	2
5	45	27	3
5	15	9	3
5	5	3	3
5	5	1	5
1	1	1	

Solução. Considerando N o número de candidatos, temos que:

N – 20 é mútiplo simultaneamente de 40, 45 e 54. O MMC(40, 45, 54) = 2^3 x 3^3 x 5 = 1 080.

O múltiplo comum de 40, 45 e 54 entre 2 000 e 2 200 é (2 x 1 080) = 2 160.

Se N – 2 = 2 160, então N = 2 160 + 20 = 2 180.

Questão 9. Uma torneira enche um tanque em 12 minutos, enquanto que uma segunda torneira gasta 18 minutos para encher o mesmo tanque. Com o tanque inicialmente vazio, abre-se a primeira torneira durante x minutos; ao fim desse tempo, fecha-se essa torneira e abre-se a segunda, a qual termina de encher o tanque em x + 3 minutos. Então, o tempo total gasto para encher o tanque é:

(A) 12 minutos **(B)** 15 minutos (C) 18 minutos (D) 20 minutos (E) 24 minutos

Solução. Considerando V o volume do tanque, temos:

i) 1º torneira enche V em 12 minutos. Logo, em 1 minuto enche $\frac{V}{12}$. Após x minutos o tanque enche $\frac{x.V}{12}$.

Quando essa torneira foi fechada faltava encher V – $\frac{x.V}{12} = \frac{12.V - x.V}{12} = \frac{V.(12-x)}{12}$.

ii) 2º torneira enche V em 18 minutos. Logo, em 1 minuto enche $\frac{V}{18}$. Em (x + 3) minutos enche $\frac{(x+3).V}{18}$.

iii) O tanque ficou cheio após a segunda torneira ser ligada. Dessa forma:

$\frac{V.(12-x)}{12} = \frac{(x+3).V}{18}$ => 3.(12 – x) = 2.(x + 3) => 36 – 3x = 2x + 6 => 5x = 30 => x = 6 minutos.

iv) O tanque foi cheio em 6 + (6 + 3) = 6 + 9 = 15 minutos.

Questão 10. O lucro de uma empresa com a venda de cada unidade de um produto é dado por L = $-x^2 + 10x - 9$, onde x representa o preço unitário desse produto. Para que valoresde x o lucro será superior a 12?

A) 1 < x < 6 B) 2 < x < 5 C) 6 < x < 10 D) 7 < x < 11 **E)** 3 < x < 7

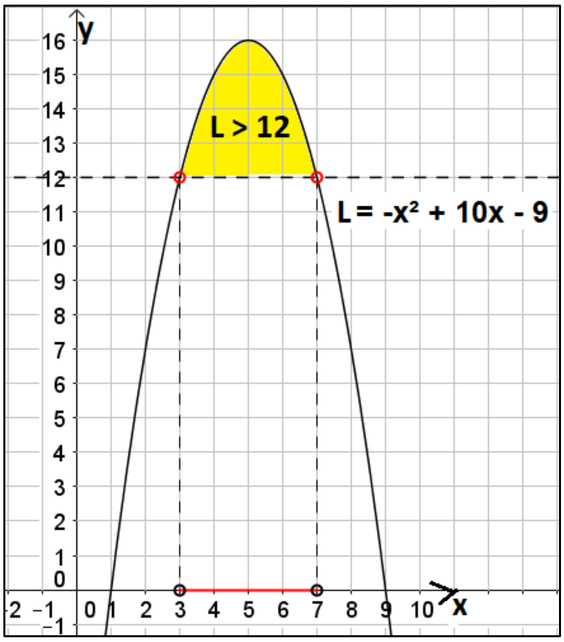
Solução. Resolvendo a inequação, temos:

L > 12 => $-x^2 + 10x - 9 > 12$ => $-x^2 + 10x - 9 - 12 > 0$ =>

=> $x^2 - 10x + 21 < 0$ => (x – 3).(x – 7) < 0.

O termo de grau 2 é positivo. Logo, os valores positivos estão entre as raízes x = 3 e y = 7.

Para o Lucro ser superior a 12, também 3 < x < 7.



Questão 11. Sabendo que $\frac{x^2+y^2+2x+2xy+2y-15}{x+y-3} = 13$, determine x + y.

(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 8 **(E)** 11

Solução. Resolvendo utilizando fatoração, temos:

$\frac{x^2+y^2+2x+2xy+2y-15}{x+y-3} = 13 \Rightarrow \frac{(x+y)^2+2(x+y)-15}{(x+y)-3} = 13$. Substituindo (x + y) por t, vem:

$\frac{t^2+2t-15}{t-3} = 13 \Rightarrow t^2 + 2t - 15 = 13t - 39 \Rightarrow t^2 - 11t + 24 = 0 \Rightarrow (t - 3).(x - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 8 \end{cases}$.

Se t = 3 => x + y = 3, mas nesse caso o denominador da expressão seria 3 – 3 = 0.

Logo, t = x + 3 = 8.

Questão 12. A raiz da equação $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ é:

(A) uma dízima periódica (B) um número natural, quadrado perfeito

(C) um número racional, cujo inverso tem quatro divisores positivos (D) um número irracional

(E) inexistente, em R

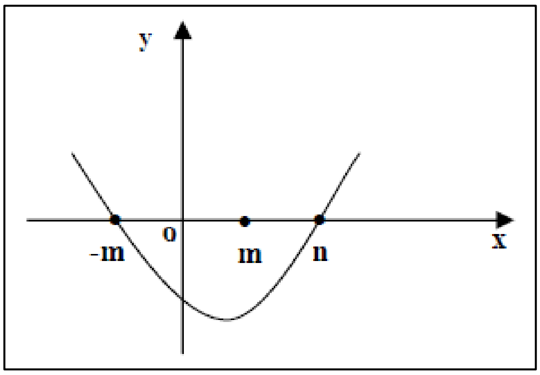
Solução. Simplificando e resolvendo, temos:

$\sqrt{x+1} + \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 2.\sqrt{x^2+x} + 2x = 1 \Rightarrow 2.\sqrt{x^2+x} = 1 - 2x \Rightarrow (2.\sqrt{x^2+x})^2 = (1-2x)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4.(x^2 + x) = 1 - 4x + 4x^2 \Rightarrow 4x^2 + 4x = 1 - 4x + 4x^2 \Rightarrow 8x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{8}$.

O inverso de $\frac{1}{8}$ é 8, que possui 4 divisores 1, 2, 4 e 8.

Questão 13. Observe a figura, que representa o gráfico da função y = $ax^2 + bx + c$, cujas raízes são **n** e **– m**:



Assinale a única afirmativa <u>FALSA</u> em relação a essa função.

(A) ac é negativo. (B) $b^2 - 4ac$ é positivo. (C) c não é nulo. **(D)** b é positivo. (E) c é negativo.

Solução. Analisando as afirmações, temos:

(A) Verdadeira. A concavidade é para cima, a > 0, e o gráfico intersecta o eixo y na parte negativa, c < 0.

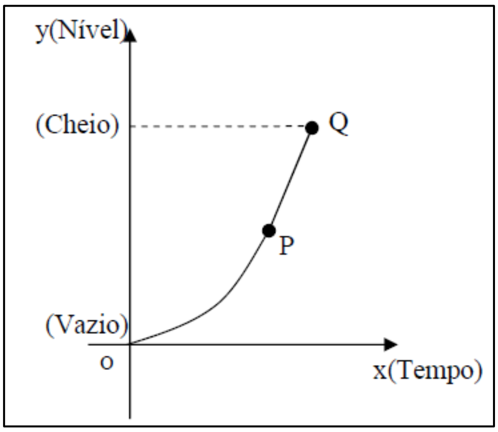
(B) Verdadeira. Se há duas raízes distintas, então o discriminante é maior que zero.

(C) Verdadeira. O gráfico não passa na origem. Logo, c ≠ 0.

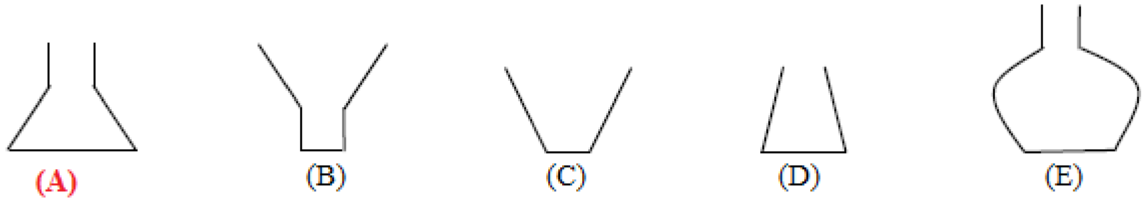
(D) Falso. Em módulo n é maior que m. Logo, a soma das raízes é positiva e portanto S > 0 e na equação do 2º grau $x^2 - Sx + P$, b < 0.

(E) Verdadeiro. A interseção do gráfico com o eixo y está na parte negativa.

Questão 14. Enche-se completamente um recipiente por meio de uma torneira de vazão constante. O gráfico abaixo mostra o nível da água no recipiente em cada instante, durante oenchimento, destacando que $\overline{PQ}$ é segmento de reta.



O gráfico representa o enchimento de qual dos recipientes abaixo?



Solução. Até o ponto P o crescimento é variável e depois fica uniforme. Dessa forma há uma mudança na velocidade de enchimento. Isso elimina as opções (C) e (D).

A velocidade no início é uniforme e maior no início, ficando constante depois, visto que o segmento $\overline{PQ}$ representa um função afim crescente com taxa de variação constante. Logo a opção correta é a letra (A).

Questão 15. Os produtores de um *show de rock* resolveram dar desconto de 25 % no preço do ingresso. Estimou-se, com isso, que o público aumentaria em 60 %. Caso se confirmassem as estimativas dos produtores, podemos afirmar que o total arrecadado nas bilheterias:

(A) aumentaria 35% **(B)** aumentaria 20% (C) aumentaria 10% (D) aumentaria 5% (E) diminuiria 10%

Solução. Supondo que o número de pessoas é N e o preço do ingresso seja P, temos:

i) Arrecadação sem desconto: A = N x P.

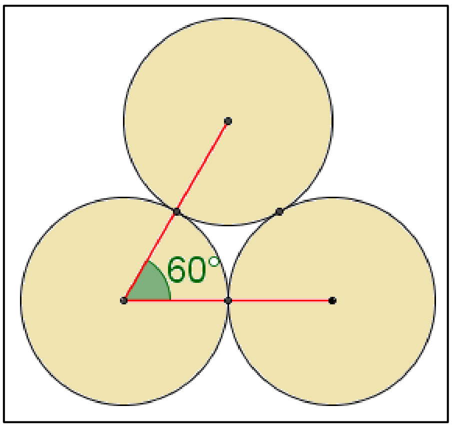
ii) Arrecadação com desconto: A' = 1,6.(N) x 0,75.(P) = (1,6).(0,75).(N x P) = 1,2.(N x P) = 1,2.A.

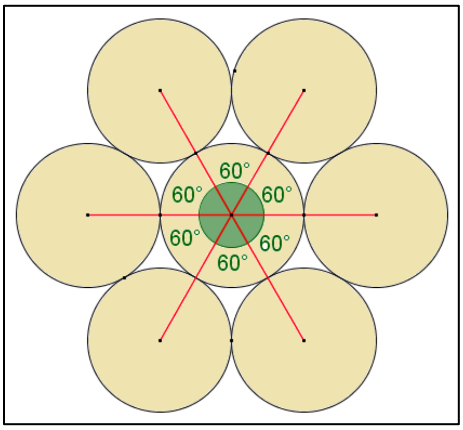
Logo, aumentaria 20%.

Questão 16. Uma moeda é colocada deitada sobre uma mesa. O número máximo de moedas iguais a ela que podem ser colocadas deitadas sobre a mesa, tangentes a ela e ao redor dela, e duas a duas tangentes entre si é:

(A) 4 (B) 5 **(C)** 6 (D) 7 (E) 8

Solução. Repare que ao colocarmos 2 moedas tangentes, forma-se um setor circular de 60° na moeda central. Ao colocarmos as demais até fecharmos completo, esse setor deve ser de 360°. Logo, o máximo são 6.

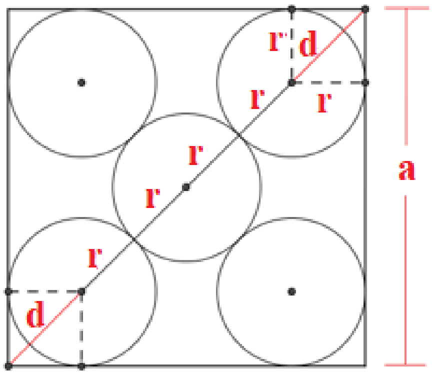




Questão 17. No interior de um quadrado de lado <u>a</u> existem cinco círculos de mesmo raio r. O centro de um dos círculos coincide com o centro do quadrado e cada um dos outros quatro círculos tangencia externamente o primeiro círculo e tangencia, também, dois lados consecutivos do quadrado. Então, podemos afirmar que:

(A) $r = a\sqrt{2} + 1$ (B) $r = a\sqrt{3} - 1$ (C) $r = 2a\sqrt{2}$ (D) $r = \frac{3a(\sqrt{3}+1)}{3}$ **(E)** $r = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$

Solução. A diagonal do quadrado vale D = a.$\sqrt{2}$. Observe a figura e os segmentos indicados.



D = 2d + 4r => 2.(r$\sqrt{2}$) + 4r = a.$\sqrt{2}$ => 2r.(2 + $\sqrt{2}$) = a.$\sqrt{2}$ => r = $\frac{a\sqrt{2}}{2.(2+\sqrt{2})} = \frac{a\sqrt{2}}{2.(2+\sqrt{2})} \cdot \frac{(2-\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})}$ =>

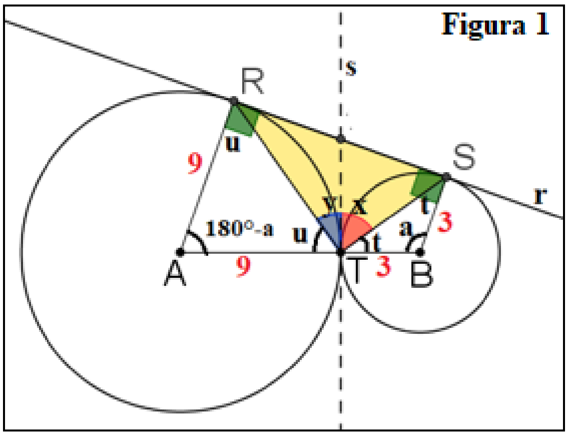
=> r = $\frac{2a\sqrt{2}-2a}{2.(4-2)} = \frac{2a(\sqrt{2}-1)}{2.(2)} = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$.

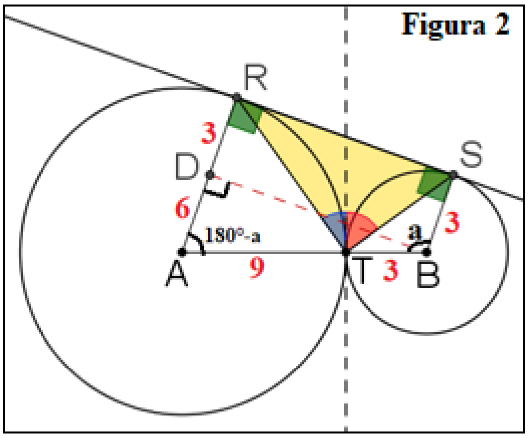
Questão 18. Duas circunferências, de raios iguais a 9 m e 3 m, são tangentes externamente num ponto T. Uma reta r tangencia estas duas circunferências em dois pontos distintos, R e S. A área, em m^2, do triângulo RST é:

(A) $27\sqrt{3}$ **(B)** $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ (C) $9\sqrt{3}$ (D) $27\sqrt{2}$ (E) $\frac{27\sqrt{2}}{2}$

Solução. Observando a figura 1, temos que $\begin{cases} 2t + a = 180° \\ 2u + 180° - a = 180° \end{cases}$ => 2(u + t) = 180° => u + t = 90°.

Logo, y + x = 90° e assim, o triângulo RST é retângulo. Na figura 2, traçamos DB paralela a RS. Aplicando a relação de Pitágoras em DAB e lei dos cossenos nos triângulos ORT e O'ST, vem:





i) PO' = RS: $(12)^2 = (6)^2 + (PO')^2$ => $(PO')^2 = 108$. **ii) $(RT)^2 + (ST)^2 = 108$.**

iii) $\begin{cases} (RT)^2 = 9^2 + 9^2 - 2.(9).(9).cos(180° - a) \\ (ST)^2 = 3^2 + 3^2 - 2.(3).(3)cosa \end{cases}$ => $\begin{cases} (RT)^2 = 162 + 162.cosa \\ (ST)^2 = 18 - 18cosa \end{cases}$ =>

=> $\begin{cases} (RT)^2 = 162 + 162.cosa \\ 9(ST)^2 = 162 - 162cosa \end{cases}$ => $\begin{cases} (RT)^2 + 9(ST)^2 = 324 \\ (RT)^2 + (ST)^2 = 108 \end{cases}$ **=> 8$(ST)^2$ = 216 => $(ST)^2$ = 27 => ST = $3\sqrt{3}$.**

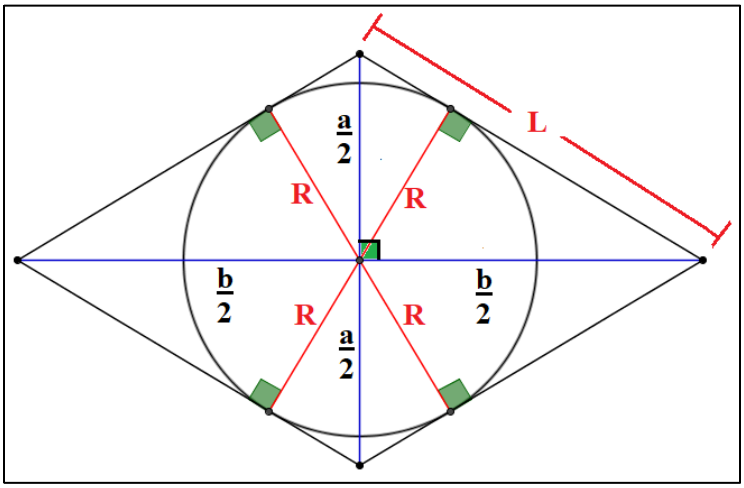
iv) Área (RST) = $\frac{(3\sqrt{3}.(9))}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$ m^2.

Questão 19. As diagonais de um losango medem a e b. A circunferência inscrita nesse losango:

(A) Só existe se a = b. (B) sempre existe e tem raio $\sqrt{ab}$. (C) sempre existe e tem raio $\sqrt{a^2 + b^2}$.

(D) sempre existe e tem raio $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. **(E)** sempre existe e tem raio $\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{2(a^2+b^2)}$.

Solução. As diagonais dividem o losango em quatro triângulos retângulos congruentes. O raio corresponde à altura de cada triângulo retângulo de catetos a/2, b/2 e hipotenusa L. Calculando o raio, temos:

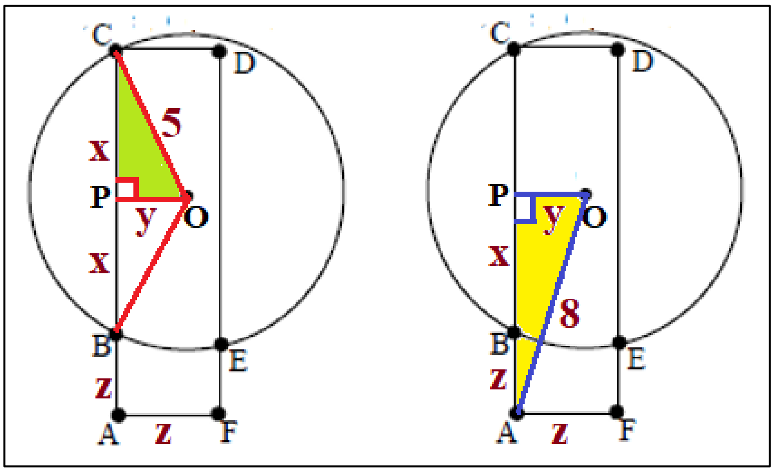


i) $L^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow L = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2}.\sqrt{a^2 + b^2}$;

ii) $L.R = \left(\frac{a}{2}\right).\left(\frac{b}{2}\right) \Rightarrow L = \frac{\left(a.b/_4\right)}{\sqrt{a^2+b^2}/_2} = \frac{a.b}{4}.\frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}.\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{a.b.\sqrt{a^2+b^2}}{2.(a^2+b^2)}$.

Questão 20. Na figura abaixo, ACDF é retângulo, B ∊ $\overline{AC}$ e E ∊ $\overline{FD}$. Os pontos B, C e E pertencem à circunferência de centro O. Sabe-se que $\overline{AB}$ e $\overline{AF}$ são congruentes e, além disso, a medida de $\overline{OA}$ é 8 cm e a medida de $\overline{OC}$ é 5 cm. Calcule a área do retângulo ACDF em cm².

(A) 24 (B) 32 (C) 36 **(D)** 39 (E) 48



Solução. Traçando OP paralela a AF, com P sendo ponto médio de CB, temos:

i) Triângulo CPO: $25 = x^2 + y^2$; **ii) Triângulo APO: $64 = (x + z)^2 + y^2 \Rightarrow 64 = x^2 + 2xz + z^2 + y^2$;**

iii) Substituindo (i) em (ii), temos: $64 = 2xz + z^2 + 25 \Rightarrow 2xz + z^2 = 64 - 25 \Rightarrow z.(2x + z) = 39$;

iv) O retângulo possui dimensões AC = 2x + z e AF = AB = z. Logo, a área do retângulo é (AC).(AF) = 39 cm².