COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
(Casa de Thomaz Coelho/1889)

CONCURSO DE ADMISSÃO AO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO 2012/2013

PROVA DE MATEMÁTICA

11 DE NOVEMBRO DE 2012

MATEMÁTICA - GABARITO

(Prof. Walter Tadeu Nogueira da Silveira – www.professorwaltertadeu.mat.br)

Questão 1. Aline gosta de aplicar seu dinheiro na bolsa de valores. No ano passado, ela aplicou a quantia de R$6.000,00 nas ações de uma empresa A, cuja cotação era de R$ 12,00. Com a crise da bolsa, o valor de cada ação dessa empresa A sofreu 20% de desvalorizaçãs. Aline, então, comprou mais R$ 3.840,00 em ações da mesma empresa. Determine o valor mínimo pelo qual deve ser vendida cada uma delas para que, ao vender todas as ações adquiridas, não tenha qualquer prejuízo.

(A) 1,09 (B) 10,00 **(C)** 10,94 (D) 11,04 (E) 19,40

Solução. Na aplicação de R$6.000,00 Aline comprou (6.000 ÷ 12) = 500 ações. Com a desvalorização de 20%, cada ação passou a custar 80% de R$12,00 que é igual a R$9,60. Dessa forma com R$3.840,00 Aline comprou mais (3.840 ÷ 9,6) = 400 ações.

i) A aplicação total de Aline foi de (6.000 + 3.840) = R$9.840,00 com a compra de (500 + 400) = 900 ações.

ii) Para que não tenha prejuízo, ela deve vender cada ação por (9.840 ÷ 900) ≅ 10,94. No mínimo R$10,94.

Questão 2. Um laboratóris produz 100 litros de determinado componente. Em seguida, para produzir vacinas, dilui esse concentrado em 1340 dm^3 de água destilada. O produto final é então armazenado em ampolas de 20 cm^3 cada, ficando cada ampola completamente cheia. O número de ampolas que pode ser produzido é igual a:

(A) 3600 (B) 7200 (C) 14400 (D) 36000 **(E)** 72000.

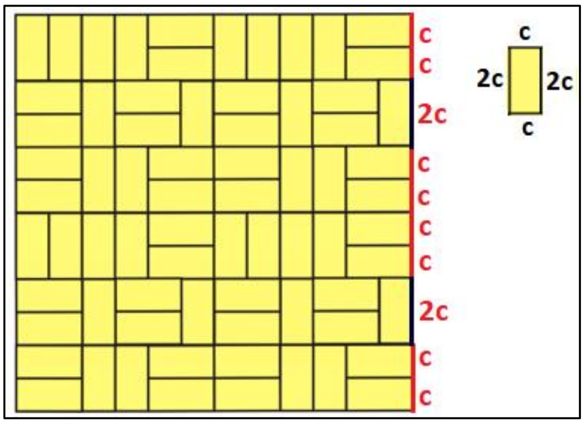
Solução. Representando as medidas em cm^3, temos que:

i) 100 litros = 100 000 mL = 100 000 cm^3; **ii) 1340 dm^3 = 1 340 000 cm^3;**

iii) O produto final possui capacidade de (100 000 + 1 340 000) = 1 440 000 cm^3.

iv) Este volume produzirá (1 440 000 ÷ 20) = 72 000 ampolas.

Questão 3.



A figura representa o piso de uma sala de estar que tem a forma de um quadrado. Esse piso é formado por tacos de madeira retangulares, todos congruentes entre si. A área da sala é igual a 36 metros quadrados. O perímetro, em metros, de cada taco é igual a:

(A) 4 **(B)** 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0,5

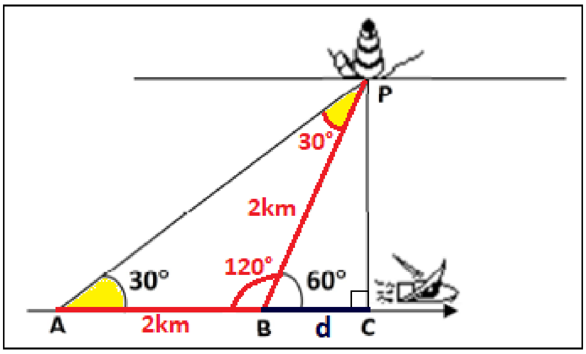
Solução. Considerando c a menor dimensão do taco, observe a dimensão da sala medida na unidade c. Temos:

A área da sala será o quadrado da medida do lado. Como a área vale 36 m^2, a medida do lado da sala é 6 m.

Então 12c = 6 m => c = (6 ÷ 12) = 0,5 m.

O perímetro do taco é (c + c + 2c + 2c) = 6c. Logo, o perímetro é 6.(0,5) = 3 m.

Questão 4. Um farol ilumina o trecho AC do ocenao, por onde passava uma embarcação que navegava pela trajetória retilínea que liga os pontos A, B e C.



O ângulo formado, no ponto A, entre as retas AP e AC, era igual a 30°. No ponto B, o ângulo formado entre a reta BP e a reta que define a trajetória da embarcação era igual a 60°. A distância entre os pontos B e P é 2 quilômetros. Os segmentos de reta AC e PC são perpendiculares. Durante a trajetória, o barco manteve um gasto de combustível constante de 1 litro a cada 16 metros percorridos. Assim, de A a C, o barco consumiu:

(A) 0,8175 litros (B) 18,75 litros **(C)** 187,5 litros (D) 1875 litros (E) 18750 litros

Solução. O triângulo ABP é isósceles. Logo, AB = BP = 2 km. A distância BC = d pode ser calculada utilizando a razão trigonométrica envolvendo o cos60°. Temos:

i) $\frac{d}{2}$ = cos60° => $\frac{d}{2} = \frac{1}{2}$ => d = 1 km; **ii) AC = (2 + 1) = 3 km;**

iii) $\frac{1L}{16\,m} = \frac{x}{3000\,m}$ => x = $\frac{3000}{16}$ = 187,5 litros.

Questão 5. Patrícia necessita telefonar para Arthur, mas lembra apenas dos 4 primeirss algarismos do número do telefone dele. Faz contato com Guilherme, que lhe dá as seguintes informações sobre os 4 algarismos restantes:

- formam um número divisível por 12;
- o algarismo das dezenas é 7;
- o algarismo das unidades de milhar é 5.

A quantidade máxima de possibilidades que Patrícia deverá verificar para identificar o número correto é:

(A) 4 (B) 5 (C) 6 **(D)** 7 (E) 8

Solução. A informação dada por Guilherme deixa o número assim: 5 _ 7 _. Para que o número seja divisível por 12, deve ser divisível por 3 e 4 ao mesmo tempo.

i) Os algarismos da dezena e unidade simples devem formar um número múltiplo de 4. Para esse caso, temos: 72 e 76. Ou seja, há duas possibilidades para a unidades simples.

ii) A soma dos algarismos até o momento é (5 + 7) = 12. Logo, já é múltiplo de 3. A soma dos dois algarismos restantes deve ser múltipla de 3. Se a unidade simples for 2, temos para a centena 3 possibilidades: 1, 4, 7. Se a unidade simples for 6, para a centena temos 4 possibilidades: 0, 3, 6 e 9.

Logo, a quantidade máxima será 7 no total: 5 076, 5 376, 5 676, 5 976, 5 172, 5 472, 5 772.

Questão 6. A equação do segundo grau $ax^2 + bx - 3 = 0$ tem –1 como uma de suas raízes. Sabendo que os coeficientes a e b são números primos positivos e que a > b, podemos afirmar que $a^2 - b^2$ é igual a:

(A) 15 (B) 18 **(C)** 21 (D) 34 (E) 53

Solução. Se – 1 é raiz da equação, então: a.$(-1)^2$ + b.(– 1) – 3 = 0 => a – b = 3.

Como a e b são primos e positivos, uma possibilidade será a = 5 e b = 2. Logo, $5^2 - 2^2$ = 25 – 4 = 21.

Questão 7. O número de divisores inteiros e positivos de $N = 2^{14} - 2^{12} + 6.2^{10}$ é igual a:

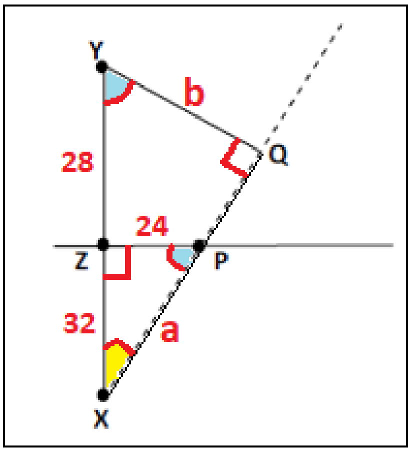
(A) 13 (B) 22 **(C)** 36 (D) 45 (E) 66

Solução. Escrevendo N como um produto de fatores, temos:

$N = 2^{14} - 2^{12} + 6.2^{10} = 2^4.2^{10} - 2^2.2^{10} + 6.2^{10} = 16.2^{10} - 4.2^{10} + 6.2^{10} = 18.2^{10} = 3^2.2.2^{10} = 3^2.2^{11}$.

Logo o número de divisores de N será: (2 + 1) x (11 + 1) = 3 x 12 = 36.

Questão 8. O Colégio Militar do Rio de Janeiro é um lugar muito agradável, psssuindo muitas árvores em sua área externa. Há algumas ruas retilíneas em seu interior, como mostra a figura abaixo.



Sabendo que:

- a rua XY, com 60 metros de extensão, e a ZP são perpendiculares;
- o ponto Z dista 32 metros de X e 24 de P;
- o ângulo $X\hat{Q}Y$, formado pelas ruas XQ e YQ, é reto.

Calcule a distância, em metros, entre os pontos Y e Q.

(A) 50 (B) 45 **(C)** 36 (D) 32 (E) 28

Solução. Os triângulos XZP e XQY são semelhantes. A medida XP = a é hipotenusa do triângulo XZP. Estabelecendo a semelhança, temos:

i) $a = \sqrt{24^2 + 32^2} = \sqrt{576 + 1024} = \sqrt{1600} = 40.$

ii) $\dfrac{24}{b} = \dfrac{40}{60} \Rightarrow b = \dfrac{(24).(60)}{40} = \dfrac{(24).(6)}{4} = (6).(6) = 36.$

Questão 9. Seja $A = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ e $B = \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ então, A – B é igual a:

(A) $-2\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $-2\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{3}$ (E) $3\sqrt{2}$

Solução. Racionalizando e efetuando, temos:

$$A - B = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}.\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} - \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} =$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{2} - (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}.$$

Questão 10. A diferença entre os quadrados de dois números positivos é 3, e o quadrado do produto desses dois números é 10. O menor desses dois números pertence ao conjunto:

(A) $\{x \in R \mid 0 < x < 1\}$ **(B)** $\{x \in R \mid 1 < x < 2\}$ (C) $\{x \in R \mid 2 < x < 3\}$

(D) $\{x \in R \mid 3 < x < 4\}$ (E) $\{x \in R \mid 4 < x < 5\}$

Solução. Considerando x e y os números, temos: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

i) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ (x.y)^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x.y = \sqrt{10} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{10}}{y} \end{cases};$

ii) $\left(\frac{\sqrt{10}}{y}\right)^2 - y^2 = 3 \Rightarrow \frac{10}{y^2} - y^2 = 3 \Rightarrow -y^4 - 3y^2 + 10 = 0 \Rightarrow y^4 + 3y^2 - 10 = 0$. **(substituição $y^2 = t$)**

iii) $t^2 + 3t - 10 = 0 \Rightarrow (t - 2).(t + 5) = 0 \Rightarrow t = 2$ **ou** $t = -5$.

iv) Se $t = -5 \Rightarrow y^2 = -5$. **Não possui solução nos números reais.**

v) Se $t = 2 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \sqrt{2}$. **Então,** $x^2 = 3 + y^2 = 3 + 2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$.

O menor é $\sqrt{2}$. Este número está entre 1 e 2. Logo, $1 < x < 2$.

Questão 11. O valor da expressão:

$$[100^2 + 200^2 + 300^2 + 400^2 + 500^2] - [99^2 + 199^2 + 299^2 + 399^2 + 499^2] \text{ é igual a:}$$

(A) 100 (B) 815 (C) 1090 (D) 2105 **(E)** 2995

Solução. Simplificando a expressão utilizando a fatoração $a^2 - b^2 = (a - b).(a + b)$, temos:

$100^2 + 200^2 + 300^2 + 400^2 + 500^2 - 99^2 - 199^2 - 299^2 - 399^2 - 499^2 =$

$= (100^2 - 99^2) + (200^2 - 199^2) + (300^2 - 299^2) + (400^2 - 399^2) + (500^2 - 499^2) =$

$= (1).(100 + 99) + (1).(200 + 199) + (1).(300 + 299) + (1).(400 + 399) + (1).(500 + 499) =$

$= 199 + 399 + 599 + 799 + 999 = (200 + 400 + 600 + 800 + 1000) - (1 + 1 + 1 + 1 + 1) =$

$= 3000 - 5 = 2995$.

Questão 12. No início de 2012, cada aluno da 3ª série do Ensino Médio do CMRJ teve a opção de escolher sua respectiva área de estudo: ou a Biomédica, ou a Tecnológica.

Em uma pesquisa, feita durante o ano, observou-se que:

- 60 rapazes optaram pela área Tecnológica;
- 91 moças optaram pela área Biomédica;
- 60% dos pesquisados são rapazes;
- 70% dos pesquisados querem a área Biomédica.

Calcule quantos alunos participaram da pesquisa.

(A) 310 (B) 320 (C) 330 (D) 340 (E) 350

Solução. De acordo com as informações, 40% dos pesquisados são moças e 30% dos pesquisados querem a área Tecnológica. Considerando R o número de rapazes e M o número de moças, temos:

i) $60\%.(R + M) = R \Rightarrow 0,6R + 0,6M = R \Rightarrow 0,6M = 0,4R \Rightarrow 6M = 4R \Rightarrow 3M = 2R \Rightarrow R = 1,5M$.

ii) Optaram pela área Biomédica $(91 + R - 60) = (R + 31)$ pesquisados;

iii) $70\%.(R + M) = R + 31 \Rightarrow 70\%.(1,5M + M) = 1,5M + 31 \Rightarrow 0,7(2,5M) = 1,5M + 31 \Rightarrow 1,75M - 1,5M = 31 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0,25M = 31 \Rightarrow M = (4).(31) = 124$. **Dessa forma há $R = 1,5.(124) = 186$ rapazes.**

iv) O total de alunos pesquisados é: 124 moças + 186 rapazes = 310.

Questão 13. O valor da expressão $\frac{(a+b)^3-(a-b)^3}{3b^{-2}+a^{-2}}$ para $b = \sqrt[3]{0,3}$ e $a = \sqrt{0,2}$ é:

(A) 0,12 (B) 0,18 (C) 0,24 (D) 1,2 (E) 1,8

Solução. Simplificando a expressão antes das substituições, temos:

$$\frac{(a+b)^3-(a-b)^3}{3b^{-2}+a^{-2}} = \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)}{\frac{3}{b^2} + \frac{1}{a^2}} =$$

$$= \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3}{\frac{3a^2 + b^2}{a^2b^2}} = \frac{6a^2b + 2b^3}{\frac{3a^2 + b^2}{a^2b^2}} = \frac{(6a^2b + 2b^3).(a^2.b^2)}{3a^2 + b^2} =$$

$$= \frac{(6a^2b+2b^3).(a^2.b^2)}{3a^2+b^2} = \frac{2b.(3a^2+b^2).(a^2.b^2)}{3a^2+b^2} = 2.a^2.b^3 = 2.\left(\sqrt{0,2}\right)^2.\left(\sqrt[3]{0,3}\right)^3 = 2.(0,2).(0,3) = 1,2.$$

Questão 14. Um aluno do CMRJ leu, em um jornal de grande circulação, que a cidade do Rio de Janeiro, durante o inverno, havia experimentado o dia mais quente do ano. A temperatura chegou a 41,2 °C no bairro de Santa Cruz, Zona Oeste da capital. Preocupado com o calor excessivo, esse aluno passou, então, a registrar as temperaturas máximas diariamente, pela manhã e ao final da tarde, anotando os valores correspondentes. Para isso, ele criou a tabela abaixo:

Temperaturas máximas em Outubro de 2012		
Dia	Manhã	Final da tarde
01	36 °C	38 °C
02	36 °C	39 °C
03	32 °C	36 °C
04	30 °C	30 °C
05	26 °C	25 °C
06	32 °C	32 °C
07	36 °C	38 °C

De acordo com o que foi registrado, podemos afirmar que:

(A) a diferença entre a moda dos valores numéricos das temperaturas do Rio ao final da tarde e a dos valores numéricos das temperaturas pela manhã foi igual a 3 °C.

(B) a temperatura diária do Rio de Janeiro, ao cair da tarde, foi sempre maior do que a registrada no período da manhã.

(C) a diferença entre a temperatura média registrada no Rio de Janeiro ao final da tarde e a registrada no período da manhã foi de, aproximadamente, 2,4 °C.

(D) a diferença entre a mediana dos valores numéricos das temperaturas do Rio ao final da tarde e a dos valores numéricos das temperaturas pela manhã foi de 4 °C.

(E) as medianas dos valores das temperaturas registradas pelo aluno, no período da manhã e ao final da tarde, foram iguais.

Solução. Analisando as afirmativas, temos:

(A) Falsa. A moda dos valores ao final da tarde é 38 °C e pela manhã, 36 °C. A diferença é 2 °C.

(B) Falsa. Dia 4 elas foram iguais e dia 5 a temperatura ao final da tarde foi menor.

(C) Falsa. Calculando as médias, temos: M (manhã) = $\frac{26° + 30° + 2.(32°) + 3.(36°)}{7} = \frac{228}{7} \cong$ **32,6 °C;**

M (tarde) = $\frac{25° + 30° + 32° + 36° + 2.(38°) + 39°}{7} = \frac{238}{7} \cong$ **34 °C. A diferença é de aproximadamente 2,6 °C.**

(D) Verdadeira. Ordenando as temperaturas pela manhã e ao final da tarde, temos:

Manhã: 26 °C – 30 °C – 32 °C – 32 °C – 36 °C – 36 °C – 36 °C => Mediana = 32 °C.

Tarde: 25 °C – 30 °C – 32 °C – 36 °C – 38 °C – 38 °C – 39 °C => Mediana = 36 °C.

A diferença entre as medianas é 4 °C.

(E) Falsa. Pela manhã foi 32 °C e ao final da tarde foi 36° C.

Questão 15. Ana Luiza aplicou seu capital a juros simples de taxa mensal 6%, durante 5 meses. Após 45 dias, Ana Paula aplicou um capital 50% superior ao capital inicial aplicado por Ana Luiza, à taxa mensal de 4%. Ao final dos 5 meses, a soma dos juros produzidos pelos capitais de Ana Luiza e Ana Paula atingiu R$ 5.100,00. O capital aplicado por Ana Luiza foi, em reais, igual a:

(A) 10.000,00 (B) 12.000,00 (C) 15.000,00 (D) 18.000,00 (E) 20.000,00

Solução. Considerando C o capital aplicado por Ana Luiza, o capital aplicado por Ana Paula foi de 1,5C. O tempo de aplicação de Ana Paula foi de (150 dias – 45 dias) = 105 dias = (90 + 15) dias = 3,5 meses. Observando os juros de cada pessoa utilizando a fórmula J = Cit, temos:

i) Ana Luiza: J = C.(0,06).(5) = 0,3C;

ii) Ana Paula: J = 1,5C.(0,04).(3,5) = 0,21C;

iii) 0,3C + 0,21C = 5.100 => 0,51C = 5.100 => C = $\frac{5100}{0,51} = \frac{510000}{51} =$ **R$10.000,00.**

Questão 16. Roberto, aluno da 1ª série do Ensino Médio do CMRJ, recebeu certa quantidade de problemas dos quais resolveu 70, ficando mais da metade sem resolver. Hoje, recebendo 6 novos problemas e resolvendo 36, ficaram sem resolver, ao todo, menos de 42 problemas. Podemos concluir que a número inicial de problemas recebido por Roberto foi igual a:

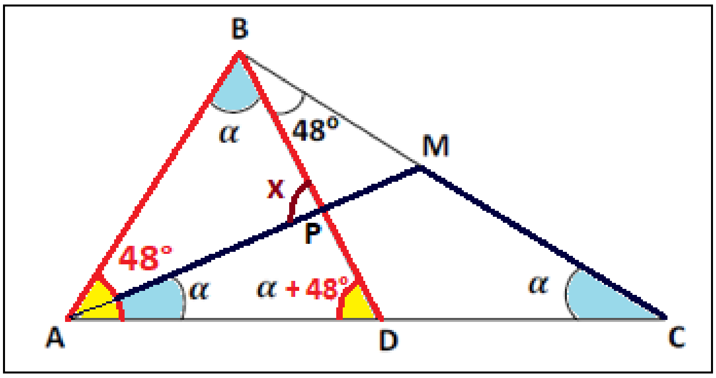
(A) 153 (B) 150 (C) 148 (D) 145 **(E)** 141

Solução. Considerando a quantidade inicial por N, temos:

i) N – 70 > $\frac{N}{2}$ **=> 2N – 140 > N => N > 140;** **ii) (N – 70 + 6) – 36 < 42 => N – 100 < 42 => N < 142;**

iii) Se 140 < N < 142, então N = 141.

Questão 17. No triângulo ABC da figura abaixo, os pontos D e M pertencem, respectivamente, aos lados AC e BC. Sabe-se que AB = BD, que o ângulo $\widehat{DBC}$ = 48° e que $\widehat{ABD} = \widehat{MAC} = \widehat{BCA}$ = α.



Nestas condições, podemos afirmar que a medida do menor ângulo formads pelas retas AM e BD é igual a:

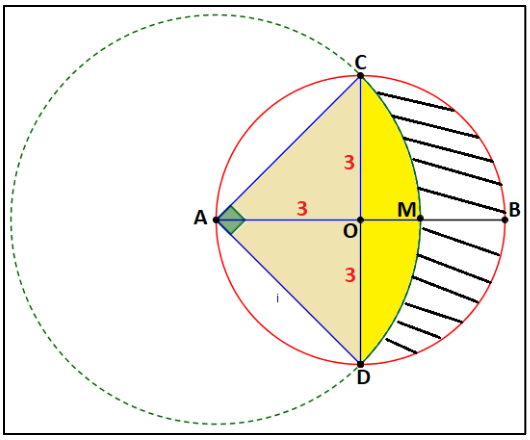
(A) 60° **(B)** 76° (C) 78° (D) 81° (E) 86°

Solução. O triângulo ABD é isósceles com os ângulos BAD e BDA congruentes. Além disso, o ângulo BDA mede (α + 48°), pois é externo ao triângulo BDC. Temos:

i) (α + 48°) + (α + 48°) + α = 180° => 3α = 180° – 96° => 3α = 84° => α = 28°.

ii) α + 48° + x = 180° => 28° + 48° + x = 180° => x = 180° – 76° = 104°. Logo, o menor é o 76°.

Questão 18. O símbolo de uma empresa encontra-se representado na figura abaixo, onde AB e CD são diâmetros perpendiculares em um círculo de raio 3 cm. O arco CMD possui centro no ponto A e raio AC. Calcule, em cm², a área da região tracejada.



(A) 6 (B) 7 (C) 8 **(D)** 9 (E) 10

Solução. A área tracejada vale a diferença entre as áreas da semicircunferência CDB e do segmento circular CMD. Calculando as áreas convenientes, temos:

i) AC = $\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ **cm;**

i) Área do setor circular de 90° (ACMD): $\frac{\pi.(3\sqrt{2})^2}{4}=\frac{18\pi}{4}=\frac{9\pi}{2}$ **cm²;**

ii) Área do triângulo ACD: $\frac{(6).(3)}{2}=$**; 9 cm²;**

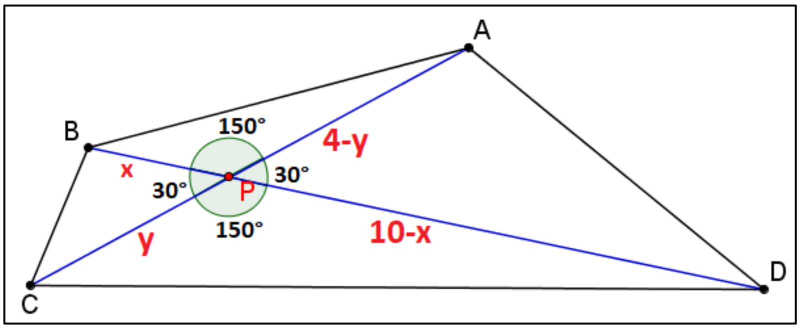
iii) Área do segmento circular (OCMD) = Área do setor – área do triângulo = ($\frac{9\pi}{2}-9$**) cm²;**

iv) Área tracejada = Área da semicircunferência (OCDB) – área do segmento = $\frac{9\pi}{2}$ **- (**$\frac{9\pi}{2}-9$**) = 9 cm².**

Questão 19. Um quadrilátero ABCD possui a diagonal menor AC = 4 cm, a diagonal maior BD = 10 cm e o ângulo $\widehat{BPC}$ = 30°, onde P é o ponto de interseção das diagonais. Calcule, em cm², o valor da área deste quadrilátero.

(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) 18

Solução. A área do quadrilátero será a soma das áreas dos quatro triângulos determinados pelas diagonais.



i) área (PBC) = $\frac{x.y.sen30°}{2}=\frac{x.y.(^1/_2)}{2}=\frac{xy}{4}$; **ii) área (PAD) =** $\frac{(4-y).(10-x).sen30°}{2}=\frac{(4-y).(10-x)}{4}$;

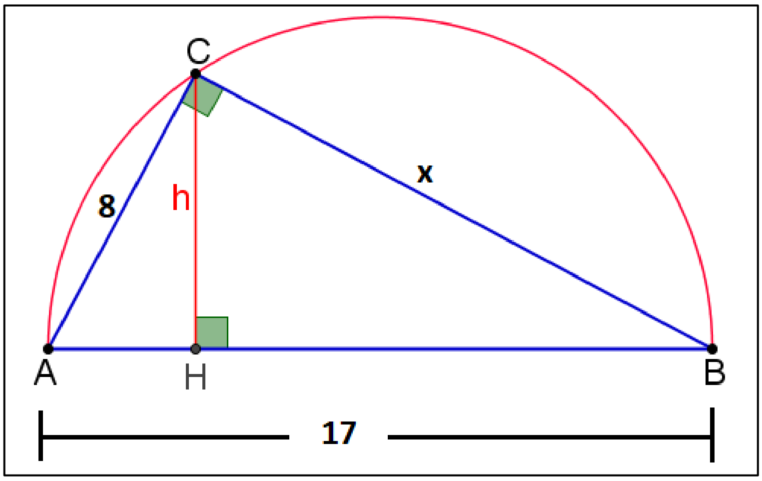
iii) área (PAB) = $\frac{x.(4-y).sen150°}{2}=\frac{x.(4-y)}{4}$; **iv) área (PCD) =** $\frac{y.(10-x).sen150°}{2}=\frac{y.(10-x)}{4}$;

v) Área (ABCD) = $\frac{xy+40-4x-10y+xy+4x-xy+10y-xy}{4}=\frac{40}{4}=$ **10.**

Questão 20. Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo inscrito em uma semicircunferência, cujo diâmetro AB é igual a 17 cm. O menor lado desse triângulo mede 8 cm. Nesse triângulo, a medida, em cm, da altura relativa ao vértice C, é igual a:

(A) 17,0 (B) 10,5 (C) 9,5 (D) 9,0 **(E)** 7,05

Solução. Todo triângulo inscrito em uma semicircunferência com um lado sendo diâmetro é retângulo. Utilizando as relações métricas no triângulo retângulo, temos:



i) $x = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15;$ **ii)** $(8).(x) = (17).h \Rightarrow h = \frac{(8).(15)}{17} = \frac{120}{17} \cong 7{,}05$ **cm.**