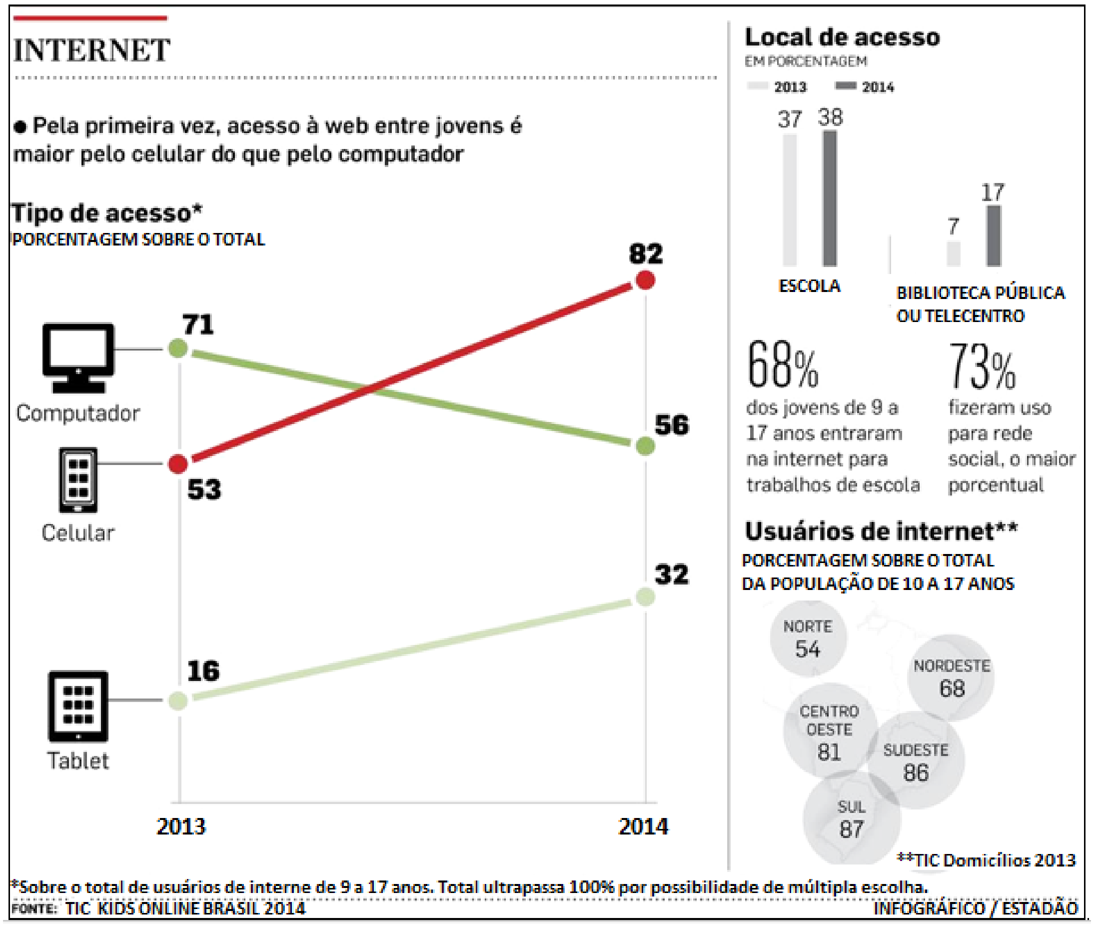
COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
(Casa de Thomaz Coelho/1889)
CONCURSO DE ADMISSÃO AO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO 2018/2019
PROVA DE MATEMÁTICA
21 DE OUTUBRO DE 2018

MATEMÁTICA - GABARITO

(Prof. Walter Tadeu Nogueira da Silveira – www.professorwaltertadeu.mat.br)

Com base na leitura e análise dos dados apresentados pela notícia e pelo infográfico abaixo, responda às questões 1 e 2.

"A mais recente pesquisa TIC Kids Online, realizada pelo Comitê Gestor da Internet, mostrou que, pela primeira vez, em 2014, o acesso à internet por celular no Brasil foi maior do que por computadores: 82% acessam pelo celular, enquanto 56% usam o desktop."



Disponível em:<<https://educacao.estadao.com.br/noticias/geral,uso-de-aplicativos-para-celular-ganha-forca-na-escola,1749345>>.Acesso em: 20 jun 2018

Questão 1. A partir das informações indicadas no item "**Local de acesso**", verifica-se que:

(A) houve uma redução, de 2013 para 2014, em percentual, do acesso à internet na escola.

(B) houve um aumento, de 2013 para 2014, de aproximadamente 1%, do acesso à internet na escola.

(C) houve uma redução, em percentual, do acesso à internet em bibliotecas públicas e telecentros de 2013 para 2014.

(D) o percentual de jovens, de 9 a 17 anos, que não utilizaram a internet para realizarem trabalhos da escola foi de 32%.

(E) em 2014, o percentual de acessos à internet nas bibliotecas públicas e telecentros aumentou 120% em relação ao percentual de 2013.

Solução. Analisando as afirmações, temos:

(A) Falsa. Houve um aumento percentual de 37% para 38%.

(B) Falso. O aumento de 37% para 38% foi de escolas como local de acesso e não número de acessos.

(C) Falsa. Houve aumento de 7% para 17%.

(D) Verdadeiro. Se 68% entraram na internet para realizarem trabalhos, então 100% - 68% = 32% não utilizaram para esse fim.

(E) Falso. O aumento foi i = $\frac{17-7}{7} = \frac{10}{7} \cong 1,42$ = 142%.

Questão 2. De acordo com as porcentagens apontadas no item **"Usuários de internet**"**, é correto afirmar que:

(A) a minoria dos jovens de 10 a 17 anos do Brasil são usuários da internet.

(B) a maioria dos jovens de 10 a 17 anos da região Sul são usuários de internet.

(C) a minoria dos jovens de 10 a 17 anos da região Nordeste são usuários da internet.

(D) a maior quantidade de indivíduos de 10 a 17 anos, usuários de internet, encontra-se na região Sul.

(E) a menor quantidade de indivíduos de 10 a 17 anos, usuários de internet, encontra-se na região Norte.

Solução. Analisando as afirmações temos:

(A) Falsa. Em cada região, o percentual foi acima de 50%. Logo a maioria é usuária.

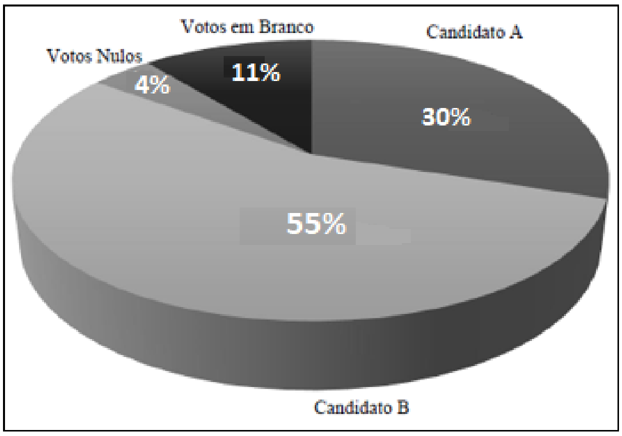
(B) Verdadeira. São 80% de usuários. Logo, a maioria na região Sul.

(C) Falsa. O percentual nessa região está acima de 50%.

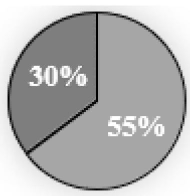
(D) Falsa. Ter o maior percentual, não implica ter a maioria de pessoas. Por exemplo: 50% de 80 é 40 e 20% de 200 é 50.

(E) Falsa. A informação de ser o menor percentual não indica menor número de pessoas. Depende do total da população da região.

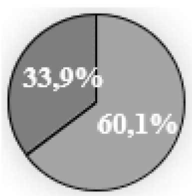
Questão 3. O gráfico abaixo mostra o resultado da apuração dos votos do segundo turno de uma eleição entre os candidatos A e B. Sabendo que votos válidos são os votos dados a cada candidato, não sendo computados os votos brancos e nulos, qual alternativa melhor representa a situação dos candidatos A e B?



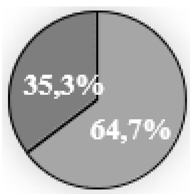
(A)



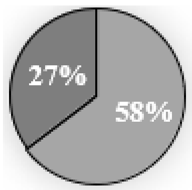
(B)



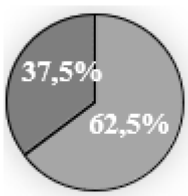
(C)



(D)



(E)

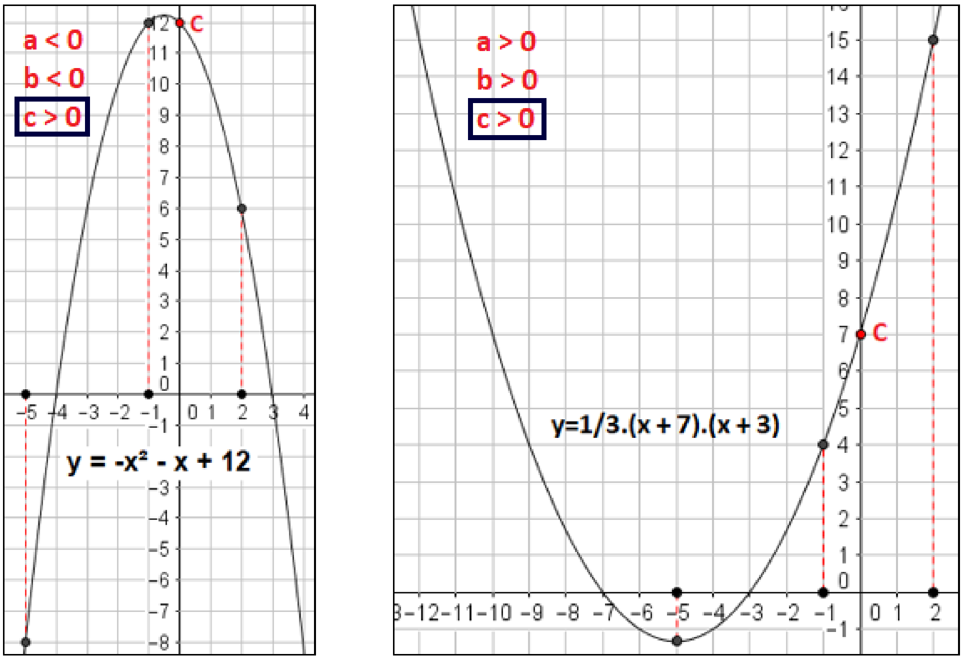


Solução. Não considerando os jogos nulos e brancos, o total de votos válidos se reduz a 85% (novo total). Então a fração que 30%, candidato A, representa do total de 85%, é: $\frac{30\%}{85\%} = \frac{30}{85} = 0{,}3529 \sim 35{,}3\%$. Logo, o percentual correspondente ao candidato B é 100% - 35,3% = 74,7%.

Questão 4. Uma função : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e $\in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, assume um valor negativo quando $x = -5$ e positivo quando $x = -1$ e $x = 2$. Logo, é correto afirmar que:

(A) $a > 0$ (B) $a < 0$ **(C)** $c > 0$ (D) $c < 0$ (E) $b > 0$

Solução. Como a imagem f(– 5) < 0 e f(– 1) > 0, o gráfico corta o eixo das abscissas em algum ponto entre x = – 5 e x = – 1. Para que f(2) seja também positivo, o gráfico corta o eixo y na parte positiva. Então c > 0 é a única certeza. Observe que não podemos garantir o sinal de <u>a</u>, nem de <u>b</u>. Veja as possibilidades.



Considere a definição a seguir para a resolução da questão 5.

"A área de um triângulo é a metade do produto da medida de sua base pela medida de sua altura."

Questão 5. Três pontos de duas funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas, respectivamente, por:

$$f(x) = 3x^2 + 6x - 24 \text{ e } g(x) = \frac{1}{10}x^2 + 2x + 9$$

serão utilizados para construção de um triângulo. Esse triângulo será construído com seus vértices sobre os gráficos dessas funções, conforme o descrito abaixo:

I. um dos seus vértices no ponto de menor imagem da função g;

II. dois vértices nos pontos de interseção da função f com o eixo das abscissas.

Dessa forma a área desse triângulo é igual a:

(A) 30 (B) 15 (C) 9 (D) 6 **(E)** 3

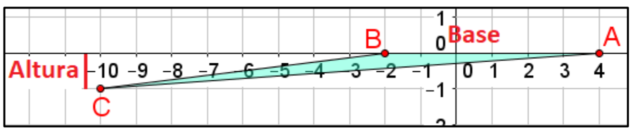
Solução. O ponto com menor imagem da função g(x) é o vértice: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

$$y_v = -\frac{(2)^2 - 4.\left(1/10\right).(9)}{4.\left(1/10\right)} = -\frac{4 - \left(36/10\right)}{4/10} = -\frac{4/10}{4/10} = -1 \text{ e } x_v = -\frac{(2)}{2.\left(1/10\right)} = -10.$$

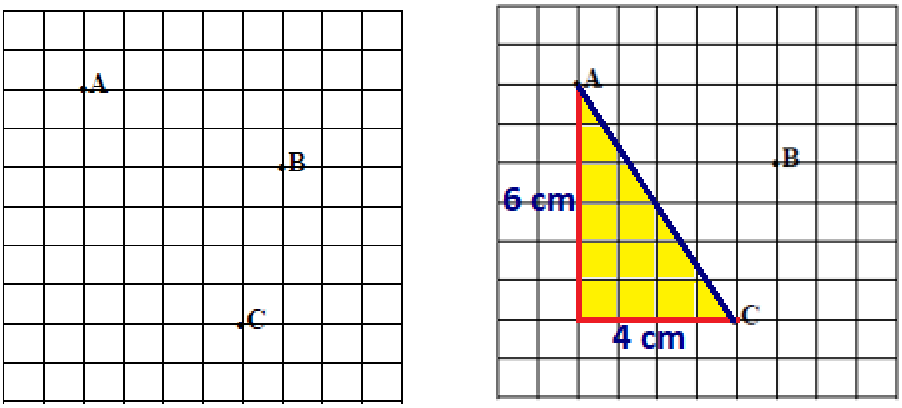
As interseções dos pontos de f(x) com o eixo das abscissas são encontrados resolvendo:

$3x^2 + 6x - 24 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x + 4).(x - 2) = 0$. Logo, x = 4 e x = – 2.

A área será: $\frac{[4-(-2)].(1)}{2} = 3$.



Questão 6. A figura abaixo apresenta 100 quadrados de lado medindo 1 cm. Uma formiga saiu do ponto A, passou pelo ponto B e foi até o ponto C. Se ela tivesse seguido o caminho em linha reta de A até C, teria percorrido

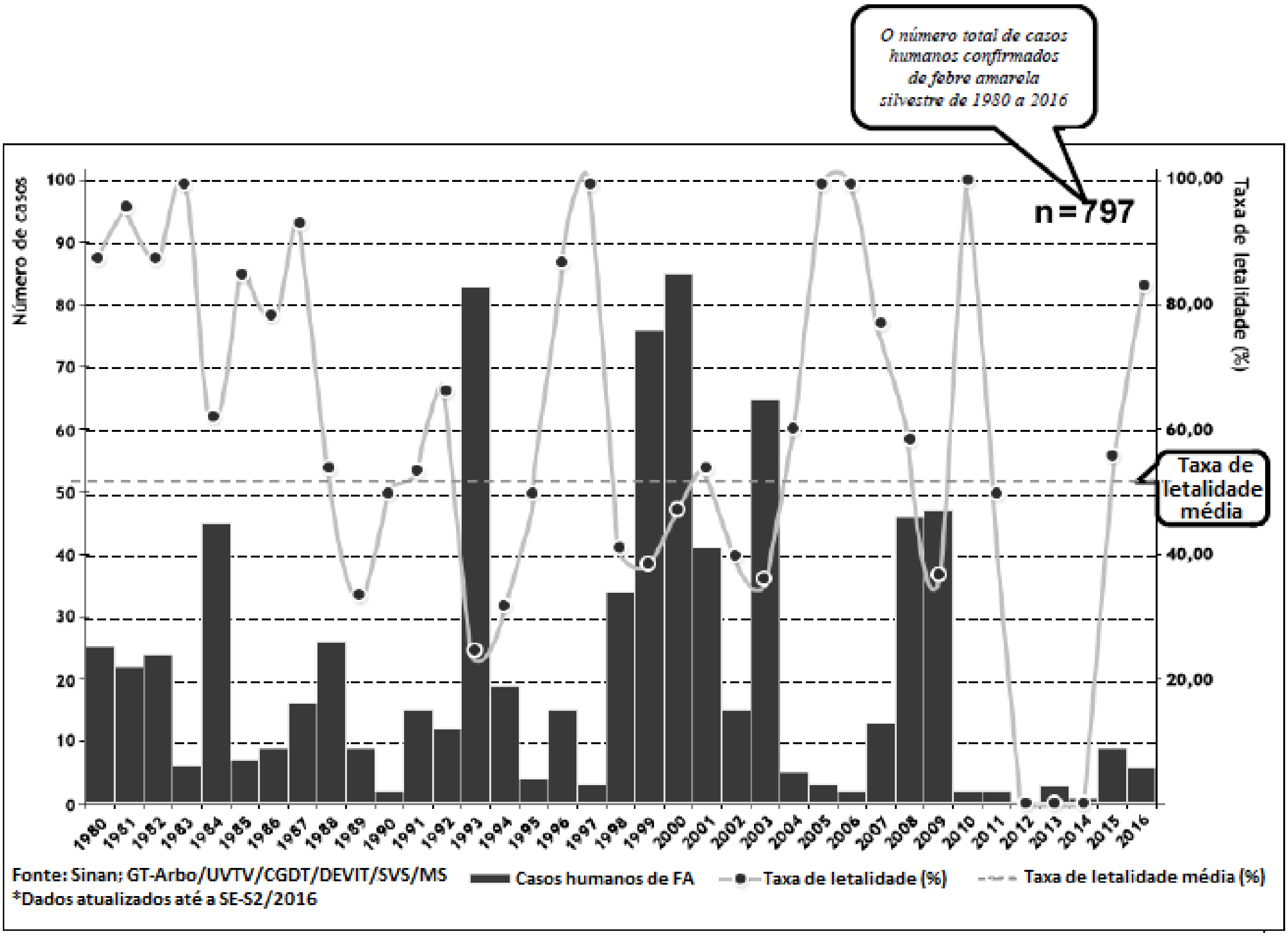


(A) $\sqrt{13}\ cm$ (B) $2\sqrt{13}\ cm$ (C) 8 cm (D) 10 cm (E) 52 cm

Solução. Em linha reta AC é a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos 6 cm e 4 cm. Aplicando a relação de Pitágoras, temos: $\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}\ cm$.

Com base na leitura e análise dos dados apresentados pelo infográfico abaixo, responda às questões 7 e 8.

"Série histórica de número de casos humanos confirmados de febre amarela silvestre e a letalidade no Brasil, 1980 a 2016."



Disponível em:<<http://www.explorerside.com/wp-content/uploads/2017/02/infografico_febre_amarela.png>>. Acesso em 20 jun 2018.

Questão 7. Segundo o gráfico de barras, conclui-se que a média, a moda e a mediana dos casos de febre amarela silvestre em humanos de 1980 a 2016 se encontra, respectivamente, entre

(A) 30 e 40 casos, 10 e 20 casos e 0 e 10 casos.
(B) 30 e 40 casos, 0 e 10 casos e 10 e 20 casos.
(C) 20 e 30 casos, 10 e 20 casos e 0 e 10 casos.
(D) 20 e 30 casos, 0 e 10 casos e 10 e 20 casos.
(E) 20 e 30 casos, 10 e 20 casos e 10 e 20 casos.

Solução. O número de casos está dividido em intervalos de classe de amplitude 10. Para efeito de cálculo utilizamos o ponto médio de cada classe. A frequência em que esses casos ocorrem será representada pelo número de anos. Organizando em uma tabela, temos:

Nº de casos	Ponto médio da classe	Frequência (nº de anos em que ocorrem)
0 |- 10	5	17
10 |- 20	15	7
20 |- 30	25	4
30 |- 40	35	1
40 |- 50	45	4
50 |- 60	55	0
60 |- 70	65	1
70 |- 80	75	1
80 |- 90	85	2

i) A média será a média ponderada dos pontos médios:

$$\text{Média} = \frac{(5).(17)+(15).(7)+(25).(4)+(35).(1)+(45).(4)+(55).(0)+(65).(1)+(75).(1)+(85).(2)}{17+7+4+1+4+0+1+1+2} =$$

$$= \frac{85+105+100+35+180+65+75+170}{37} = \frac{325+490}{37} = \frac{815}{37} \approx 22.$$ **Logo, na classe 20 a 30 casos.**

ii) A moda será a classe com maior frequência: 0 a 10 casos com 17 ocorrências.

iii) De 1980 até 2016 há 37 anos. Então, como esse número é ímpar, a mediana será estará no intervalo onde se localiza o $\frac{37+1}{2}$ =19° termo na frequência. Logo, na classe 10 a 20 casos.

Questão 8. O gráfico da taxa de letalidade mostra que a quantidade de pessoas que vieram a óbito em:

(A) 1993 é inferior à observada em 1992.
(B) 2010 é superior à observada em 2009.
(C) 2011 é a metade da observada em 2010.
(D) 2009 é a mesma que a observada em 2003.
(E) 2006 é a mesma que a observada em 2005.

Solução. O gráfico de letalidade indica a porcentagem. O cálculo da quantidade de pessoas será feito com a faixa indicada no gráfico de barras. Analisando as afirmações, temos:

(A) Falsa. Em 1993 o número de casos estava entre 60 e 80 e o percentual de letalidade foi de cerca de 25%. Logo, entre 15 e 20 pessoas. Em 1992 houve aproximadamente 10% dos 10 casos. Logo, menor que em 1993.

(B) Falsa. Tanto o percentual, quanto a faixa de casos em 2010 são inferiores a 2009.

(C) Verdadeira. No gráfico de barras as quantidades sejam equivalentes e na taxa de letalidade o percentual de 2011 está abaixo da linha média de 50%. Em 2011 está em 100%.

(D) Falsa. Os percentuais na taxa de letalidade são os mesmos, mas as quantidades de casos não são as mesmas.

(E) Falsa. No gráfico de casos as quatidades não são as mesmas. Logo, embora os percentuais de letalidade sejam equivalentes, os valores serão diferentes.

Questão 9. A maioria das televisões apresenta tela semelhante a um retângulo de lados 3 e 4 cuja diagonal representa as polegadas da televisão. Logo, um tela de 45 polegadas tem lados iguais a

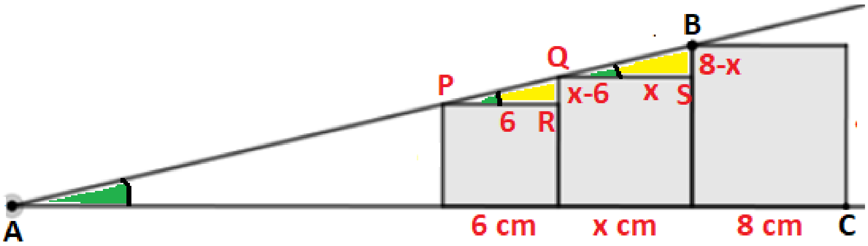
(A) 12 e 16 polegadas. (B) 15 e 20 polegadas. (C) 18 e 24 polegadas.

(D) 27 e 36 polegadas. (E) 30 e 40 polegadas.

Solução. A diagonal do retângulo é a hipotenusa do triângulo retângulo de lados 3 e 4.

Logo, d = $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Quando essa diagonal é 45 = (5 x 9), os lados serão: 3 x 9 = 27 e 4 x 9 = 36.

Questão 10. A figura a seguir é composta por duas retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ e três quadrados com um dos seus lados sobre a reta $\overrightarrow{AC}$ e um de seus vértices sobre a reta $\overrightarrow{AB}$.



Se as áreas dos quadrados menor e maior são iguais, respectivamente, a 36 cm² e 64 cm², então a área do quadrado intermediário é igual a:

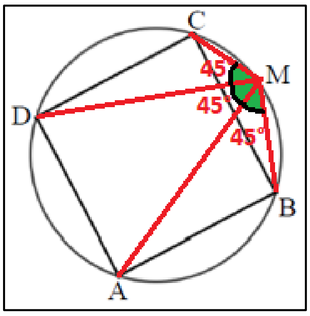
(A) 45cm² (B) 45,5cm² **(C)** 48cm² (D) 48,5cm² (E) 49cm²

Solução. Os lados dos quadrados menor e maior são, respectivamente 6 cm e 8 cm. Considerando o lado do quadrado intermediário como x e identificando os triângulos retângulos semelhantes PQR e QBS, temos:

i) $\frac{6}{x-6} = \frac{x}{8-x} =$ $x^2 - 6x = 48 - 6x$ => $x^2 = 48$.

ii) Como x é o lado do quadrado intermediário, sua área será A = x^2 = 48 cm².

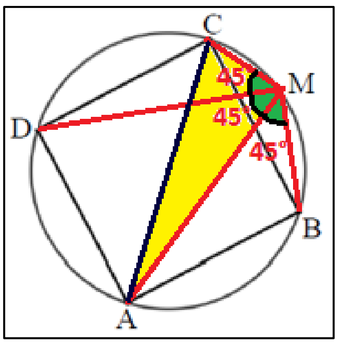
Questão 11. Considere o quadrado ABCD, cujo lado mede 5 cm, e M um ponto sobre o círculo circunscrito a este quadrado, não coincidente com os vértices A, B, C e D, conforme ilustra a figura a seguir.

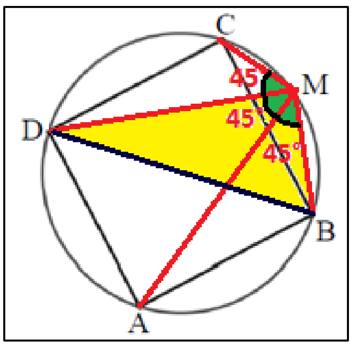


Qual o valor da soma $(MA)^2 + (MB)^2 + (MC)^2 + (MD)^2$?

(A) 10 (B) $10\sqrt{2}$ (C) 50 (D) $10\sqrt{2}$ **(E)** 100

Solução. Os ângulos CMD, DMA e AMB são congruentes, medem 45°, pois são inscritos em relação a arcos de 90°. Traçando as diagonais AC e DB, identificamos dois triângulos retângulos, cujas hipotenusas são as diagonais AD = DB = $5\sqrt{2}$.





Aplicando a relação de Pitágoras nos triângulos identificados, temos:

$$\begin{cases} \overline{CA}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{MA}^2 \\ \overline{DB}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{MB}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (5\sqrt{2})^2 = \overline{MC}^2 + \overline{MA}^2 \\ (5\sqrt{2})^2 = \overline{MD}^2 + \overline{MB}^2 \end{cases} \Rightarrow \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = 50 + 50 = 100.$$

OBS: Esse resultado é invariante. Isto é, qualquer posição que o ponto M esteja, a soma dos quadrados das distâncias de M aos vértices do quadrado será igual à soma dos quadrados das diagonais do quadrado.

Questão 12. A companhia de turismo *Vivitour* freta um ônibus de 40 lugares de acordo com as seguintes condições descritas no contrato de afretamento:

I. Cada passageiro pagará R$160,00, se todos os 40 lugares forem ocupados.

II. Cada passageiro pagará um adicional de R$8,00 por lugar não ocupado.

Quantos lugares a companhia de turismo deverá vender para garantir lucro máximo?

(A) 30 (B) 32 (C) 35 (D) 38 (E) 40

Solução. Considerando A o valor da arrecadação com as passagens e x o número de lugares vazios, temos que A(x) = (40 – x).(160 + 8x). Repare que se x = 0 (nenhum lugar vazio), A(0) = (40).(160) = R$6.400,00.

A expressão de A(x) = – 8x^2 + 160x + 6400 representa uma função quadrática com concavidade para baixo e, portanto, admite máximo. O valor arrecadado será máximo quando o número de lugares vazios for máximo. Este valor corresponde ao x_V (abscissa do vértice). Temos: $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{160}{2.(-8)} = 10$.

Se o máximo de lugares vazios deve ser 10, então a companhia deverá vender (40 – 10) = 30 lugares.

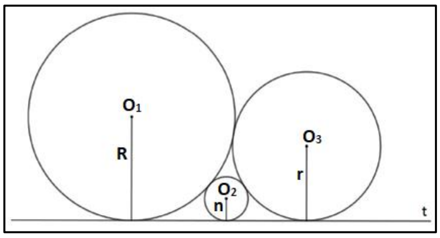
Utilizando as três definições apresentadas a seguir, responda à questão 13.

***I.* Um círculo de centro *O* e raio *k* é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância ao centro *O* é menor ou igual a *k*.**

II. Reta tangente a um círculo, de centro *O*, em um ponto *P* é a reta que intersecta o círculo no ponto *P* e é perpendicular ao raio ‾.

III. Círculos tangentes exteriores são círculos que se intersectam em apenas um ponto, e a distância entre seus centros é igual a soma dos seus raios.

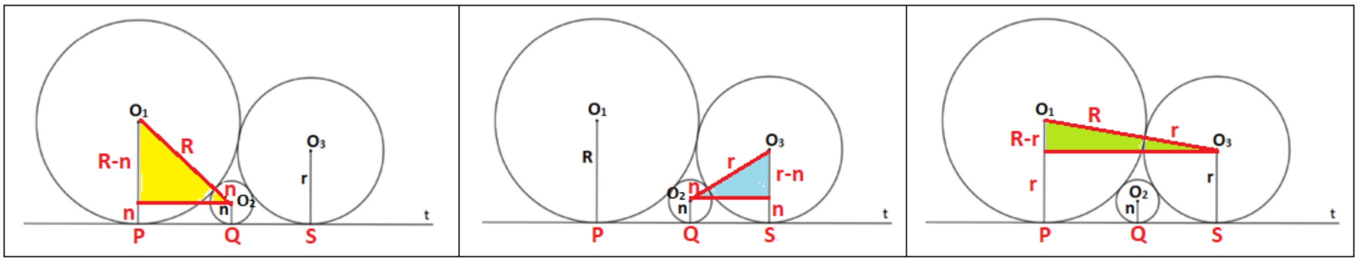
Questão 13. Na figura abaixo, são apresentados três círculos de centros O_1, O_2 e O_3 e raios *R*, *n* e *r* respectivamente. Esses círculos são tangentes exteriores e também tangentes a uma reta *t*. Assim o valor de *n* é:



(A) $\frac{Rr}{2\sqrt{R}+2\sqrt{r}}$ **(B)** $\frac{Rr}{R+2\sqrt{Rr}+r}$ (C) $\frac{Rr}{R-2\sqrt{Rr}+r}$

(D) $\frac{Rr}{2(R^2-r^2)}$ (E) $\frac{Rr}{2(\sqrt{R}-\sqrt{r})}$

Solução. Aplicando a relação de Pitágoras nos triângulos retângulos indicados, temos:



i) $\overline{PQ}^2 = (R+n)^2 - (R-n)^2 = R^2 + 2Rn + n^2 - R^2 + 2Rn - n^2 = 4Rn.$

ii) $\overline{QS}^2 = (r+n)^2 - (r-n)^2 = r^2 + 2rn + n^2 - r^2 + 2rn - n^2 = 4rn.$

iii) $\overline{PS}^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = R^2 + 2Rr + r^2 - R^2 + 2Rr - r^2 = 4Rr.$

iv) $\overline{PS} = \overline{PQ} + \overline{QS} \Rightarrow \overline{PS}^2 = (\overline{PQ} + \overline{QS})^2 \Rightarrow \overline{PS}^2 = \overline{PQ}^2 + 2.\overline{PQ}.\overline{QS} + \overline{QS}^2 \Rightarrow$

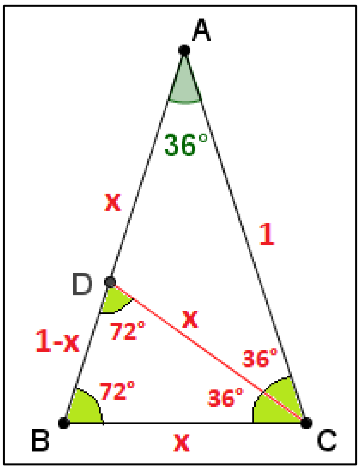
$\Rightarrow 4Rr = 4Rn + 2.(\sqrt{4Rn}).(\sqrt{4rn}) + 4rn \Rightarrow 4Rr = 4Rn + 2.\left(\sqrt{16n^2Rr}\right) + 4rn \Rightarrow$

$\Rightarrow 4Rr = 4Rn + 2.4.n.\sqrt{Rr} + 4rn \Rightarrow Rr = n\left(R + 2\sqrt{Rr} + r\right) \Rightarrow n = \frac{Rr}{R+2\sqrt{Rr}+r}$

Questão 14. Dado que a bissetriz do ângulo $\widehat{ACB}$ é o lugar geométrico dos pontos que equidistam das semirretas $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ e, portanto, divide o ângulo em dois ângulos congruentes, considere um triângulo ABC isósceles com $AB = AC = 1$ e med $(\hat{A}) = 36^0$. Se $D \in \overline{AB}$ de forma que $\overline{CD}$ seja a bissetriz do ângulo $\hat{C}$, então a medida $\overline{BC}$ é:

(A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ cm (B) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}$ cm (C) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ cm (D) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ cm (A) $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$ cm

Solução. Como o triângulo é isósceles e Â = 36°, os ângulos da base medirão 72° cada. A bissetriz CD determina outros dois triângulos isósceles. Observando as medidas e aplicando o teorema das bissetrizes, temos:



$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x^2 = 1 - x \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.(1).(-1)}}{2.(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

OBS: Consideramos somente a raiz positiva, pois x corresponde a medida de lado.

Questão 15. Na primeira fase da Copa do Mundo de 2018, fase de grupos, as trinta e duas seleções foram divididas em oito grupos de quatro seleções, sendo que as duas seleções melhor classificadas de cada grupo avançaram para a próxima fase. Cada uma das quatro seleções, de cada grupo, jogou uma vez com as outras três seleções.

Segundo o critério de pontos (Pt), a cada vitória, a seleção computava três pontos e, a cada derrota, zero ponto.

Em caso de empate no jogo, somou-se um ponto para cada seleção.

Em caso de igualdade na pontuação, ao final da primeira fase, os critérios de desempate foram:

1. Melhor saldo de gols (total de gols feitos menos o total de gols sofridos);
2. Maior número de gols feitos (gols pró);
3. Confronto direto;
4. Menos cartões vermelhos e amarelos;
5. Sorteio.

Numa simulação dos jogos da primeira fase, de um grupo qualquer, ocorreu o descrito abaixo:

- ✓ houve um time que ganhou todas as partidas por um a zero;
- ✓ houve um outro time que perdeu todas as partidas por zero a um.

Considerando apenas os critérios de pontos (Pt), o critério 1 de desempate (Sd) e o critério 2 de desempate (Gp), qual das opções abaixo pode representar as pontuações das quatro seleções desse grupo?

(A)

	Pt	Sd	Gp
1ª	9	3	3
2ª	6	0	3
3ª	3	-1	2
4ª	0	-3	0

(B)

	Pt	Sd	Gp
1ª	9	3	3
2ª	6	1	3
3ª	3	-1	2
4ª	0	-3	0

(C)

	Pt	Sd	Gp
1ª	9	3	3
2ª	4	0	2
3ª	4	1	1
4ª	0	-3	0

(D)

	Pt	Sd	Gp
1ª	9	3	3
2ª	4	0	2
3ª	4	0	1
4ª	0	-3	0

(E)

	Pt	Sd	Gp
1ª	9	3	3
2ª	4	1	1
3ª	3	-1	1
4ª	0	-3	0

(A)

	Pt	Sd	Gp
1ª	9	3	3
2ª	6	0	3
3ª	3	-1	2
4ª	0	-3	0

(B)

	Pt	Sd	Gp
1ª	9	3	3
2ª	6	1	3
3ª	3	-1	2
4ª	0	-3	0

(C)

	Pt	Sd	Gp
1ª	9	3	3
2ª	4	0	2
3ª	4	1	1
4ª	0	-3	0

(D)

	Pt	Sd	Gp
1ª	9	3	3
2ª	4	0	2
3ª	4	0	1
4ª	0	-3	0

(E)

	Pt	Sd	Gp
1ª	9	3	3
2ª	4	1	1
3ª	3	-1	1
4ª	0	-3	0

Solução. Analisando cada opção, temos:

(A) Falsa. Satisfaz às condições. O 2° obteve 2 vitórias, sendo uma contra o que perdeu todas e fez 1 gol. Perdeu 1 contra o 1° colocado. O saldo aí já seria zero. Se ele venceu a partida contra o 3° colocado, então ele pelo menos teve 1 gol de vantagem. O saldo então não poderia ser 0.

(B) Verdadeira. Esta situação indica que o 2° colocado levou 3 gols e fez 2 gols para que seu saldo seja – 1. No caso venceu o 4° colocado de 1 x 0, perdeu para o 2° de 2 x 1 e para o 1° colocado de 1 x 0. O 2° colocado fez 3 gols e perdeu para o 1° colocado de 1 x 0. Logo, saldo positivo de 1 gol.

(C) Falsa. O 2° e o 3° colocado estão empatados em pontos, mas no critério 1 de desempate o 3° está com saldo maior.

(D) Falsa. O 3° colocado e o 4° colocado estão com 4 pontos. Ambos perderam de 1 x 0 para o 1° colocado e venceram o 4° colocado de 1x 0. Entre si houve empate. Logo, o saldo de gols não pode ser diferente entre eles.

(E) Se o 2° colocado possui 4 pontos, venceu 1 partida e empatou outra. O 3° colocado venceu uma e perdeu outra. Logo o empate teria que ser com o 2° colocado e ele teria também 4 pontos.

Questão 16. A forma de potência mais simples do radical

$$\sqrt[3]{11^{29}.\sqrt[4]{11^{28}.\sqrt[5]{11^{27}.\sqrt[6]{11^{26}.\sqrt[7]{11^{25}}}}}}\text{ é:}$$

(A) $11^{3509/280}$ (B) $11^{1132/56}$ (C) $11^{504/125}$ (D) $11^{27/5}$ (E) $11^{3/56}$

Solução. Utilizando as propriedades dos radicais, inserindo os termos nos radicais elevados aos valores dos índices, temos:

$$\sqrt[3]{11^{29}.\sqrt[4]{11^{28}.\sqrt[5]{11^{27}.\sqrt[6]{11^{26}.\sqrt[7]{11^{25}}}}}} = \sqrt[3]{11^{29}.\sqrt[4]{11^{28}.\sqrt[5]{11^{27}.\sqrt[42]{11^{7\times 26+25}}}}} =$$

$$= \sqrt[3]{11^{29}.\sqrt[4]{11^{28}.\sqrt[210]{11^{42\times 27+7\times 26+25}}}} = \sqrt[3]{11^{29}.\sqrt[840]{11^{210\times 28+42\times 27+7\times 26+25}}} =$$

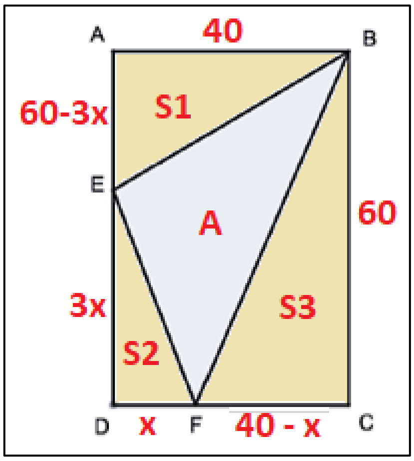
$$= \sqrt[2520]{11^{840\times 29+210\times 28+42\times 27+7\times 26+25}} = \sqrt[2520]{11^{24360+5880+1134+182+25}} =$$

$$= \sqrt[2520]{11^{31581}} = 11^{\frac{31581}{2520}} = 11^{\frac{10527}{840}} = 11^{\frac{3509}{280}}.$$

Com base na definição a seguir, responda à questão 17.

"A área de um triângulo é a metade do produto da medida de sua base pela medida de sua altura."

Questão 17. Considere o retângulo *ABCD*, cuja base mede 40 cm e altura mede 60 cm, e o triângulo *BEF* construído com vértices sobre os lados do retângulo, conforme a figura abaixo. Sabendo que ED = 3DF e a área do triângulo *BEF* é a maior possível, qual a área deste triângulo?



(A) 750 cm^2 (B) 900 cm^2 (C) 1050 cm^2

(D) 1200 cm^2 **(E)** 1350 cm^2

Solução. A área do triângulo será em função de x e representa a diferença entre a área do retângulo e a somas das áreas S1, S2 e S3.

i) Área do retângulo: (60).(40) = 2.400 cm^2.

ii) S1 = $\frac{(40).(60-3x)}{2} = \frac{2400-120x}{2}$.

iii) S2 = $\frac{(3x).(x)}{2} = \frac{3x^2}{2}$.

iv) S3 = $\frac{(60).(40-x)}{2} = \frac{2400-60x}{2}$.

v) A(x) = 2400 – $\frac{2400-120x}{2} - \frac{3x^2}{2} - \frac{2400-60x}{2} = -\frac{3x^2}{2}$ + 2400 – 1200 + 60x – 1200 + 30x =>

=> A(x) = $-\frac{3x^2}{2}$ + 90x . Esta é uma função quadrática com coeficiente do termo x^2 negativo. Logo, admite máximo.

vi) Área máxima será a ordenada do vértice: $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(90)^2-4.(-3/2).(0)}{4.(-3/2)} = \frac{8100}{6}$ = 1350 cm^2.

Questão 18. Assinale a opção que contém a afirmação correta.

(A) Para *a* e *b* reais e *n* natural, $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow$ $b^n = a$.

(B) Para *a* e *b* reais positivos, $\sqrt{a^2 + b^2}$ = a + b.

(C) Para *a* e *b* reais, se $a^2 = b^2$ então a = b.

(D) Para *a* e *b* reais positivos, $\sqrt[3]{a}.\sqrt{b} = \sqrt[6]{a^2.b^3}$.

(E) Para qualquer *a* reail, $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2$.

Solução. Analisando as afirmações, temos:

(A) Falsa. Se n for par, a igualdade não é verdadeira. Exemplo: $\sqrt[2]{-4} = b$ ∉R (reais).

(B) Falsa. Contraexemplo: $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \neq 2 + 3$.

(C) Falsa. Contraexemplo: $(-2)^2 = (2)^2$ e (– 2) ≠ (2).

(D) Verdadeira. Para multiplicar radicais de índices diferentes precisamos igualar os índices. Uma das formas é utilizar o MMM entre eles. No caso, $\sqrt[3]{a}.\sqrt{b} = a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{6}}.b^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{a^2}.\sqrt[6]{b^3} = \sqrt[6]{a^2.b^3}$.

(E) Falsa. Temos que $\sqrt{a^2} = |a| \neq (\sqrt{a})^2 = a$.

Questão 19. A equação do segundo grau cujas raízes são iguais ao triplo do valor das raízes da equação

$$x^2 + bx + c = 0 \text{ é:}$$

(A) $x^2 + 3bx + 9c = 0$ (B) $x^2 + 3bx + 3c = 0$ (C) $\frac{x^2}{3} + 3bx + 9c = 0$

(D) $3x^2 + 3bx + 3c = 0$ (E) $3x^2 + 3bx + 9c = 0$

Solução. Utilizando as relações de Girard, temos:

i) Para $x^2 + bx + c = 0$, temos as raízes x_1 e x_2. Como o coeficiente do termo quadrático é 1, temos: $\begin{cases} b = x_1 + x_2 \\ c = x_1 . x_2 \end{cases}$.

ii) Como na equação pedida as raízes são o triplo, temos: $\begin{cases} b' = 3x_1 + 3x_2 = 3.(x_1 + x_2) = 3b \\ c' = (3x_1).(3x_2) = 9.(x_1 . x_2) = 9c \end{cases}$.

Logo a equação será: $x^2 + 3bx + 9c = 0$.

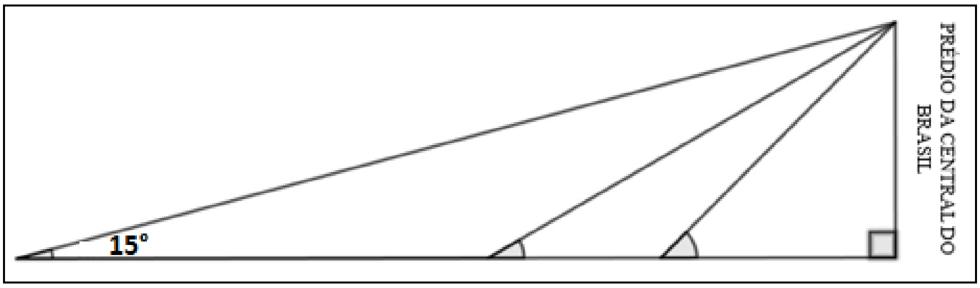
Questão 20. Os alunos do 9º ano do CMRJ foram a uma visita ao Palácio Duque de Caxias para, além de conhecer o palácio, executar um trabalho sobre "grandes medições", solicitado pelo seu professor de Matemática.

Os alunos tinham que estimar a altura do prédio da Central do Brasil localizado ao lado do Palácio Duque de Caxias. Para realizar a tarefa, os alunos teriam que fazer a medição de ângulos a partir de três pontos distintos, determinados pelo professor, com o auxílio de um teodolito e utilizar $\sqrt{3} = 1{,}73$ em seus cálculos.

Observe os resultados obtidos com as três medições descritas a seguir:

- ✓ a primeira medição foi feita a uma distância de 410 m do prédio, e o topo do prédio foi observado segundo um ângulo de 15º;
- ✓ a segunda medição foi feita depois de se aproximar do prédio, e o ângulo observado foi o dobro do ângulo da primeira medição;
- ✓ a terceira medição foi feita depois de se aproximar 84 m do prédio, a partir do ponto da segunda medição, e o ângulo observado foi o triplo do ângulo da primeira medição.

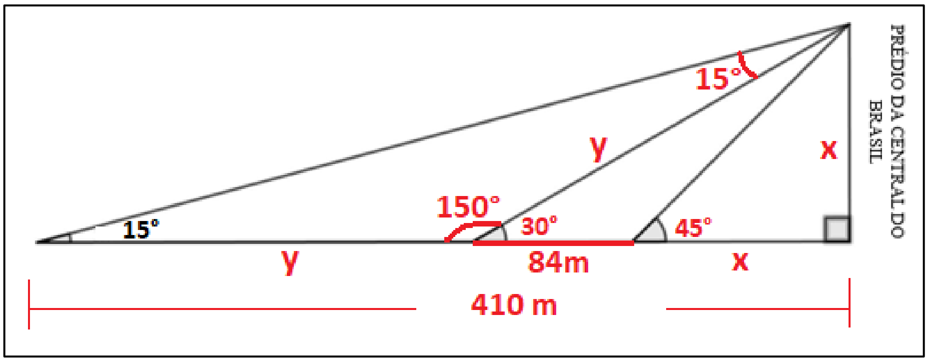
Disponível em: <<https://fatosfotoseregistros.files.wordpress.com/2016/06/central2015.jpg?w=640>>. Acesso em: 20 jun 2018.



A partir desses dados, calcule o valor aproximado da altura do prédio da Central do Brasil.

(A) 34 m (B) 48 m (C) 79 m **(D)** 115 m (E) 121 m

Solução. De acordo com as informações do texto, observe a figura e os triângulos isósceles determinados. Utilizando relações trigonométricas, temos:



i) $tg30° = \frac{x}{84+x} => \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{84+x} => 3x = 84\sqrt{3} + x\sqrt{3} => x.(3-\sqrt{3}) = 84.\sqrt{3} => x = \frac{84.\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} =>$

$=> x = \frac{84.\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}.\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\right) => x = \frac{252\sqrt{3}+252}{9-3} = \frac{252\sqrt{3}+252}{6}$ **= 42.(1,73) + 42 = 72,66 + 42 = 114,66 m.**

Como o valor é aproximado, temos que 114,66 m é próximo a 115 m.