COLÉGIO PEDRO II – CAMPUS REALENGO II

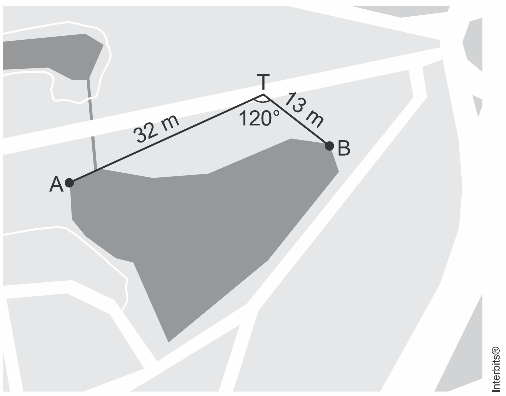
LISTA DE APROFUNDAMENTO – **UERJ – 2ª FASE**

MATEMÁTICA

PROFESSOR: ANTÔNIO ANDRADE
COORDENADOR: DIEGO VIUG

QUESTÃO 01

(Uerj 2017) Ao coletar os dados para um estudo topográfico da margem de um lago a partir dos pontos A, B e T, um técnico determinou as medidas $AT = 32\text{ m}$; $BT = 13\text{ m}$ e $A\hat{T}B = 120^\circ$, representadas no esquema abaixo.



Calcule a distância, em metros, entre os pontos A e B, definidos pelo técnico nas margens desse lago.

QUESTÃO 02

(Uerj 2017) O treinador de um time de futebol desconhece a média das idades de seus 11 jogadores. Porém, ele possui as seguintes informações:

- o capitão tem 30 anos;
- o goleiro tem 23 anos;
- a média de idade do time sem esses dois jogadores é um ano menor do que a média de idade do time completo.

Calcule a média de idade do time completo.

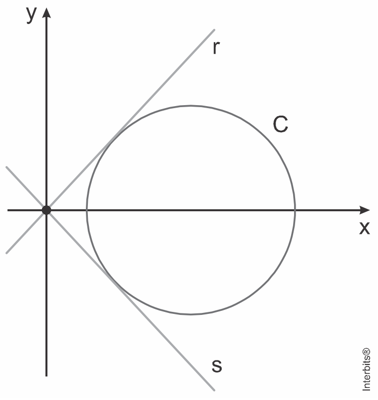
QUESTÃO 03

3. (Uerj 2017) O proprietário de uma lanchonete vai ao supermercado comprar sardinha e atum enlatados. Cada lata de sardinha pesa 400 g; e cada lata de atum, 300 g. Como sua bolsa de compras suporta até $6{,}5\text{ kg}$, ele decide comprar exatamente 6 kg dessas latas. Sabe-se que foi comprada pelo menos uma lata de cada pescado.

Determine o maior número possível de latas que o proprietário da lanchonete poderá comprar.

QUESTÃO 04

4. (Uerj 2017) Considere a circunferência C de equação $x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0$, representada graficamente a seguir.



Determine as equações das retas r e s que passam pela origem e são tangentes à circunferência.

QUESTÃO 05

(Uerj 2017) Uma criança possui um cofre com 45 moedas: 15 de dez centavos, 15 de cinquenta centavos e 15 de um real. Ela vai retirar do cofre um grupo de 12 moedas ao acaso. Há vários modos de ocorrer essa retirada. Admita que as retiradas são diferenciadas apenas pela quantidade de moedas de cada valor.

Determine quantas retiradas distintas, desse grupo de 12 moedas, a criança poderá realizar.

QUESTÃO 06

(Uerj 2017) Um capital de C reais foi investido a juros compostos de 10% ao mês e gerou, em três meses, um montante de $R\$\ 53.240,00.$

Calcule o valor, em reais, do capital inicial $C.$

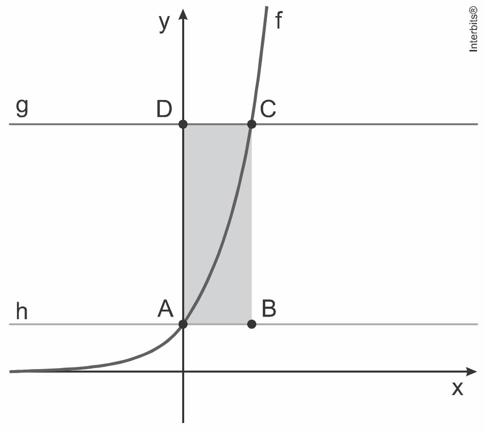
QUESTÃO 07

(Uerj 2017) Em uma atividade nas olimpíadas de matemática de uma escola, os alunos largaram, no sentido do solo, uma pequena bola de uma altura de $12\ m.$ Eles observaram que, cada vez que a bola toca o solo, ela sobe e atinge 50% da altura máxima da queda imediatamente anterior.

Calcule a distância total, em metros, percorrida na vertical pela bola ao tocar o solo pela oitava vez.

QUESTÃO 08

(Uerj 2017) Observe o plano cartesiano a seguir, no qual estão representados os gráficos das funções definidas por $f(x) = 2^{x+1},$ $g(x) = 8$ e $h(x) = k,$ sendo $x \in \mathbb{R}$ e k uma constante real.

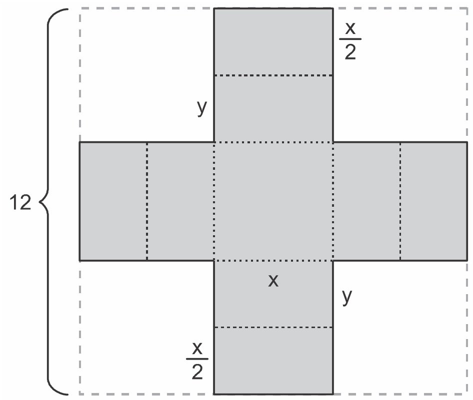


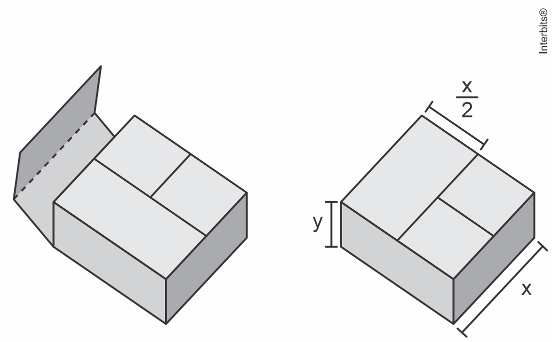
No retângulo $ABCD$, destacado no plano, os vértices A e C são as interseções dos gráficos $f \cap h$ e $f \cap g$, respectivamente.

Determine a área desse retângulo.

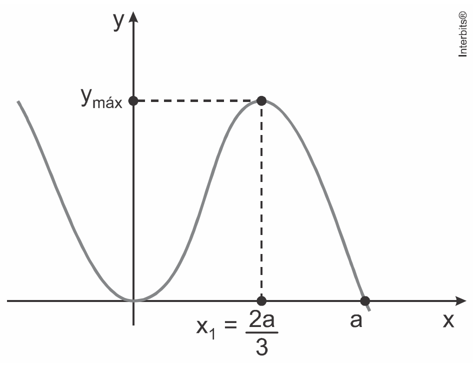
QUESTÃO 09

(Uerj 2017) Para construir uma caixa com a forma de um paralelepípedo retângulo, foi usado um quadrado de cartolina de $12\ \text{cm}$ de lado. Nessa cartolina, recortou-se um dodecágono com quatro lados medindo $x\ \text{cm}$ e oito lados medindo $\left(\frac{x}{2}+y\right)\ \text{cm}$. A caixa tem altura y e sua base é um quadrado de lado x. Observe as ilustrações:





Sabe-se que o gráfico a seguir representa uma função polinomial de variável real definida por $P(x) = -x^3 + ax^2$, sendo a um número real positivo. Para $x > 0$, $P(x)$ assume valor máximo em $x_1 = \frac{2a}{3}$.



Com base nessas informações, calcule o maior volume que essa caixa pode assumir.

QUESTÃO 10

(Uerj 2017) Crianças de uma escola participaram de uma campanha de vacinação contra a paralisia infantil e o sarampo. Após a campanha, verificou-se que 80% das crianças receberam a vacina contra a paralisia, 90% receberam a vacina contra o sarampo, e 5% não receberam nem uma, nem outra.

Determine o percentual de crianças dessa escola que receberam as duas vacinas.

QUESTÃO 11

(Uerj 2018) Em uma matriz quadrada A de ordem três, as somas dos elementos de cada linha, de cada coluna ou de cada diagonal são sempre iguais. Observe alguns de seus elementos:

$$A = \begin{bmatrix} 14 & \_\_ & 16 \\ 12 & \_\_ & \_\_ \\ 4 & \_\_ & a_{33} \end{bmatrix}$$

Determine o elemento a_{33}.

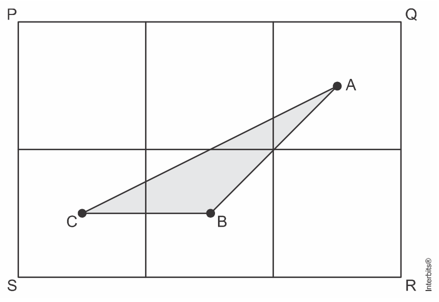
QUESTÃO 12

(Uerj 2018) Duas latas contêm $250\,\text{mL}$ e $350\,\text{mL}$ de um mesmo suco e são vendidas, respectivamente, por R\$ 3,00 e R\$ 4,90.

Tomando por base o preço por mililitro do suco, calcule quantos por cento a lata maior é mais cara do que a lata menor.

QUESTÃO 13

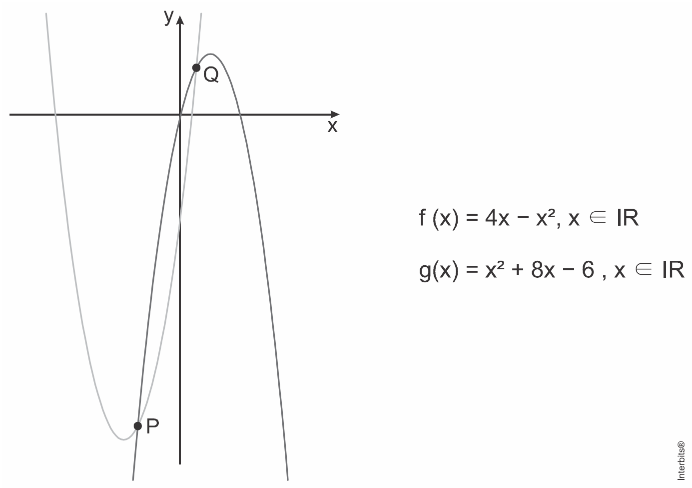
(Uerj 2018) O retângulo $PQRS$ é formado por seis quadrados cujos lados medem $2\text{ cm}.$ O triângulo $ABC,$ em seu interior, possui os vértices definidos pela interseção das diagonais de três desses quadrados, conforme ilustra a figura.



Determine a área do triângulo ABC tomando como unidade a área de um quadrado de lado igual a $2\text{ cm}.$

QUESTÃO 14

(Uerj 2018) No plano cartesiano a seguir, estão representados os gráficos das funções f e g, sendo P e Q seus pontos de interseção.



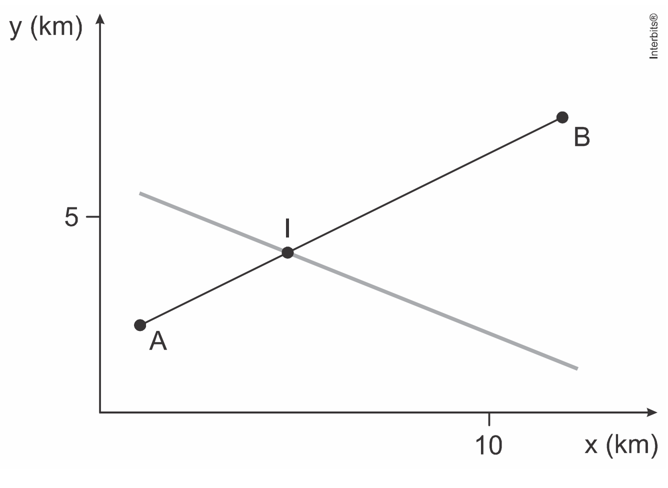
$f(x) = 4x - x^2,\ x \in \mathbb{R}$

$g(x) = x^2 + 8x - 6,\ x \in \mathbb{R}$

Determine a medida do segmento $\overline{PQ}$.

QUESTÃO 15

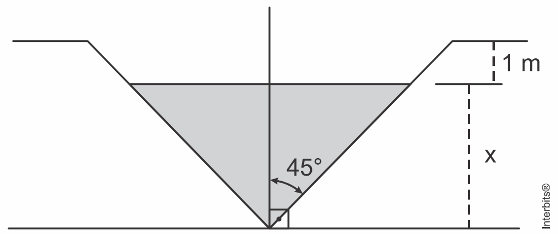
(Uerj 2018) No projeto de construção de uma estrada retilínea entre duas vilas, foi escolhido um sistema referencial cartesiano em que os centros das vilas estão nos pontos $A(1, 2)$ e $B(11, 7)$. O trecho AB é atravessado por um rio que tem seu curso em linha reta, cuja equação, nesse sistema, é $x + 3y = 17$. Observe abaixo o esboço do projeto.



Desprezando as larguras da estrada e do rio, determine as coordenadas do ponto de interseção I.

QUESTÃO 16

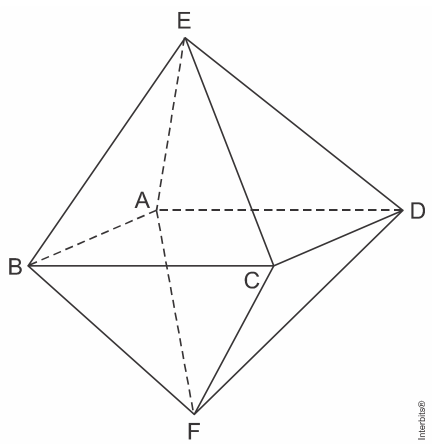
(Uerj 2018) Um depósito de óleo tem a forma de um cone circular reto cujo eixo vertical forma com suas geratrizes o ângulo de 45°. Foram retirados desse depósito $19\ m^3$ de óleo. Com isso, a altura do nível de óleo foi reduzida em $1\ m$ e passou a ter X metros de altura.



Considerando $\pi = 3$, calcule a altura x do nível de óleo.

QUESTÃO 17

(Uerj 2018) A figura a seguir representa um objeto com a forma de um octaedro. Admita que suas arestas, feitas de arames fixados nos vértices, possuem os comprimentos indicados na tabela.



Arestas	AB	AD	AE	AF	BC	BE	BF	CD	CE	CF	DE	DF
Comprimento (cm)	10	11	12	10	11	12	11	12	11	10	12	12

Calcule o menor comprimento do arame, em centímetros, necessário para construir esse objeto.

QUESTÃO 18

(Uerj 2018) Um jogo individual da memória contém oito cartas, sendo duas a duas iguais, conforme ilustrado a seguir.

Observe as etapas do jogo:

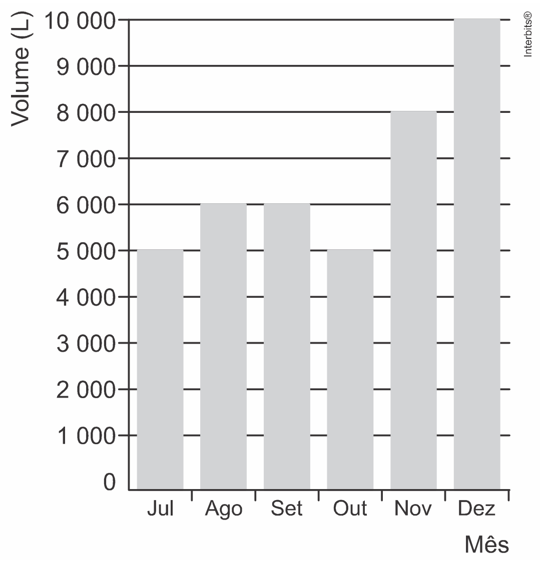
1. viram-se as figuras para baixo;
2. embaralham-se as cartas;
3. o jogador desvira duas cartas na primeira jogada.

O jogo continua se ele acertar um par de figuras iguais. Nesse caso, o jogador desvira mais duas cartas, e assim sucessivamente. Ele será vencedor se conseguir desvirar os quatro pares de cartas iguais em quatro jogadas seguidas. Se errar algum par, ele perde o jogo.

Calcule a probabilidade de o jogador perder nesse jogo.

QUESTÃO 19

(Uerj 2018) Uma indústria produziu, ao longo de um semestre, a quantidade de suco de laranja indicada no gráfico abaixo.



De julho a setembro, cada litro de suco foi vendido por R$ 1,20; de outubro a dezembro, por R$ 0,80.

Calcule o módulo da diferença entre os valores totais arrecadados pela indústria, com a venda desse suco, entre os trimestres de julho a setembro e de outubro a dezembro.

QUESTÃO 20

(Uerj 2018) A sequência (a_n) é definida do seguinte modo:

$$a_1 = 5$$
$$a_{n+1} = a_n + 3$$

Determine a média aritmética dos 51 primeiros termos dessa sequência.

Gabarito:

Resposta da questão 1:
Tem-se, pela Lei dos Cossenos, que a resposta é

$$\overline{AB}^2 = \overline{AT}^2 + \overline{BT}^2 - 2 \cdot \overline{AT} \cdot \overline{BT} \cdot \cos A\hat{T}B \Leftrightarrow$$
$$\overline{AB}^2 = 32^2 + 13^2 - 2 \cdot 32 \cdot 13 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$
$$\overline{AB} = \sqrt{1609} \Rightarrow$$
$$\overline{AB} \cong 40 \text{ m}.$$

Resposta da questão 2:
Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_9$ as idades desconhecidas. Logo, temos

$$\frac{\sum_{i=1}^{9} x_i}{9} = \frac{\sum_{i=1}^{9} x_i + 23 + 30}{11} - 1 \Leftrightarrow 11 \cdot \sum_{i=1}^{9} x_i = 9 \cdot \sum_{i=1}^{9} x_i + 477 - 99$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{9} x_i = 189.$$

Por conseguinte, a resposta é $\frac{189 + 53}{11} = 22.$

Resposta da questão 3:
Sejam s e a, respectivamente, o número de latas de sardinha e o número de latas de atum, com $s \geq 1$, $a \geq 1$ e $s, a \in \mathbb{Z}_+$. Logo, vem

$$300s + 400a = 6000 \Leftrightarrow a = \frac{60 - 3s}{4}.$$

Para que o total de latas seja máximo, o número de latas de atum deve ser mínimo e o de sardinhas deve ser máximo. Assim, vem $s = 16$ e $a = 3$. Em consequência, a resposta é $s + a = 19$.

Resposta da questão 4:
Seja $y = m_r x$, com $m_r > 0$, a equação da reta r. Se r é tangente a C, então o discriminante da equação

$$x^2 + (m_r x)^2 - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow (m_r^2 + 1)x^2 - 8x + 8 = 0$$

é igual a zero. Logo, temos

$$(-8)^2 - 4 \cdot (m_r^2 + 1) \cdot 8 = 0 \Rightarrow m_r = 1.$$

Ademais, sendo $y = m_s x$, com $m_s < 0$, concluímos, por um raciocínio inteiramente análogo, que $m_s = -1$.
Portanto, as equações das retas r e s, são, respectivamente, $y = x$ e $y = -x$.

Resposta da questão 5:
Sejam x, y e z, respectivamente, o número de moedas de dez centavos, o número de moedas de cinquenta centavos e o número de moedas de um real, de tal sorte que $x + y + z = 12$.
Queremos calcular o número de soluções inteiras não negativas dessa equação. Tal resultado corresponde ao número de combinações completas de 3 objetos tomados 12 a 12, isto é,

$$CR_3^{12} = \binom{3 + 12 - 1}{12} = \frac{14!}{12! \cdot 2!} = 91.$$

Resposta da questão 6:
Sendo $i = 10\% = 0{,}1$ e $n = 3$, vem

$$53240 = C(1+0,1)^3 \Leftrightarrow C = \frac{53240}{1,331}$$
$$\Leftrightarrow C = \text{R\$ } 40.000,00.$$

Resposta da questão 7:
A resposta é dada por

$$\begin{aligned} 12 + 12 + 12 \cdot \frac{1}{2} + \ldots + 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 &= 12 + 12 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 12 + 12 \cdot \frac{63}{32} \\ &\cong 36 \text{ m}. \end{aligned}$$

Resposta da questão 8:
A abscissa do ponto C, x_C, é tal que
$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2^{x+1} = 8 \Leftrightarrow x_C = 2.$$

Logo, a ordenada do ponto C, $y_C = f(x_C)$, é $y_C = 8$.
Ademais, a ordenada do ponto A, $y_A = f(x_A)$, é igual a $f(0)$, ou seja, $y_A = 2$.
Portanto, como $x_B = x_C$ e $y_B = y_A$, segue que a resposta é dada por
$$\begin{aligned} (ABCD) &= (x_B - x_A) \cdot (y_C - y_B) \\ &= 2 \cdot 6 \\ &= 12 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Resposta da questão 9:
Tem-se que
$$2 \cdot \left(\frac{x}{2} + y\right) + x = 12 \Leftrightarrow y = 6 - x,$$

com $0 < x < 6$. Logo, o volume, V, da caixa é dado por
$$V = x \cdot x \cdot y = -x^3 + 6x^2 = P(x).$$

Portanto, segue que $a = 6$ e, assim, vem $x_1 = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$.
A resposta é $P(4) = -4^3 + 6 \cdot 4^2 = 32 \text{cm}^3$.

Resposta da questão 10:
Seja p o percentual pedido. Tem-se que
$$(80\% - p) + p + (90\% - p) + 5\% = 100\% \Leftrightarrow p = 75\%.$$

Resposta da questão 11:
Calculando:
$$\text{Soma} = 14 + 12 + 4 = 30$$
$$4 + 16 + a_{22} = 30 \Rightarrow a_{22} = 10$$
$$14 + 10 + a_{33} = 30 \Rightarrow a_{33} = 6$$

Resposta da questão 12:
Calculando:
$$\left.\begin{array}{l} \text{Lata menor} = \frac{3}{250} = 0,012 \\ \text{Lata maior} = \frac{4,9}{350} = 0,014 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \frac{0,014 - 0,012}{0,012} = 0,16666 \approx 16,7\%$$

Resposta da questão 13:
Calculando:

$$S=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{2\cdot 2}{2}=2\ cm^2$$

Resposta da questão 14:
Calculando:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow 4x-x^2=x^2+8x-6\Rightarrow 2x^2+4x-6=0\Rightarrow x^2+2x-3=0\Rightarrow \begin{cases} x_Q=1 \\ x_P=-3 \end{cases}$$

$$f(1)=4-1=3\Rightarrow Q(1,3)$$

$$f(-3)=4\cdot(-3)-(-3)^2=-12-9=-21\Rightarrow P(-3,-21)$$

$$d_{\overline{PQ}}=\sqrt{(-3-1)^2+(-21-3)^2}=\sqrt{16+576}=\sqrt{592}\approx 24{,}33$$

Resposta da questão 15:
Calculando:

$$\text{reta}\Rightarrow y-y_0=m\cdot(x-x_0)$$

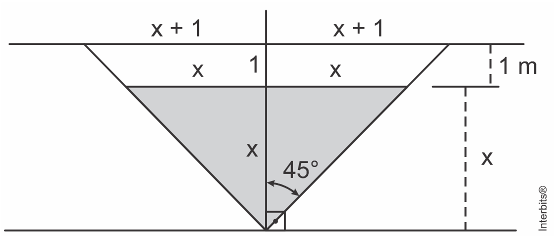
$$m=\frac{7-2}{11-1}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

$$\text{reta AB}\Rightarrow y-2=\frac{1}{2}\cdot(x-1)\Rightarrow y=\frac{x+3}{2}$$

$$\text{reta rio}\Rightarrow x+3y=17\Rightarrow y=\frac{17-x}{3}$$

$$\text{intersecção}\Rightarrow \frac{17-x}{3}=\frac{x+3}{2}\Rightarrow 34-2x=3x+9\Rightarrow 5x=25\Rightarrow x=5\Rightarrow y=\frac{5+3}{2}=4\Rightarrow I(5,4)$$

Resposta da questão 16:



Calculando:

$$\frac{\pi\cdot(x+1)^2\cdot(x+1)}{3}-\frac{\pi\cdot x^2\cdot x}{3}=19\Rightarrow (x+1)^3-x^3=19$$

$$x^3+3x^2+3x+1-x^3-19=0\Rightarrow 3x^2+3x-18=0\Rightarrow x^2+x-6=0\Rightarrow \begin{cases} x=-3\ \ (\text{não convém}) \\ \text{ou} \\ x=2 \end{cases}$$

Resposta da questão 17:
Calculando:

$$\text{Perímetro}=AB+BC+CD+AD+AE+BE+CE+DE+BF+AF+DF+CF$$

$$10+11+12+11+12+12+11+12+11+10+12+10=134\ cm$$

Resposta da questão 18:
Calculando:

$$P(\text{perder}) = 1 - P(\text{ganhar})$$
$$P(\text{ganhar}) = 1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right) \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{105}$$
$$P(\text{perder}) = 1 - \frac{1}{105} = \frac{104}{105}$$

Resposta da questão 19:

Calculando:

$$\left.\begin{array}{l} V_{1^{\circ}\ \text{Trimestre}} = (5000 + 2 \cdot 6000) \cdot 1,2 = 20400 \\ V_{2^{\circ}\ \text{Trimestre}} = (5000 + 8000 + 10000) \cdot 0,8 = 18400 \end{array}\right\rangle \Rightarrow 20400 - 18400 = 2000 \text{ reais}$$

Resposta da questão 20:

Como se trata de uma PA de razão 3, então a média de seus termos será igual a soma do primeiro e do último divididos por 2. Calculando:

$$a_1 = 5$$
$$a_{51} = 5 + (51 - 1) \cdot 3 = 155$$
$$\text{Média} = \frac{5 + 155}{2} = \frac{160}{2} = 80$$

Resumo das questões selecionadas nesta atividade

Data de elaboração: 13/11/2018 às 21:52
Nome do arquivo: Aula de aprofundamento UERJ

Legenda:
Q/Prova = número da questão na prova
Q/DB = número da questão no banco de dados do SuperPro®

Q/prova	Q/DB	Grau/Dif.	Matéria	Fonte	Tipo
1	166211	Baixa	Matemática	Uerj/2017	Analítica
2	166208	Média	Matemática	Uerj/2017	Analítica
3	166207	Média	Matemática	Uerj/2017	Analítica
4	166212	Média	Matemática	Uerj/2017	Analítica
5	166213	Média	Matemática	Uerj/2017	Analítica
6	166206	Baixa	Matemática	Uerj/2017	Analítica
7	166209	Média	Matemática	Uerj/2017	Analítica
8	166210	Média	Matemática	Uerj/2017	Analítica
9	166214	Média	Matemática	Uerj/2017	Analítica
10	166205	Baixa	Matemática	Uerj/2017	Analítica
11	176639	Baixa	Matemática	Uerj/2018	Analítica
12	176640	Baixa	Matemática	Uerj/2018	Analítica
13	176641	Baixa	Matemática	Uerj/2018	Analítica
14	176643	Média	Matemática	Uerj/2018	Analítica
15	176644	Média	Matemática	Uerj/2018	Analítica
16	176645	Média	Matemática	Uerj/2018	Analítica
17	176637	Baixa	Matemática	Uerj/2018	Analítica
18	176646	Média	Matemática	Uerj/2018	Analítica
19	176638	Baixa	Matemática	Uerj/2018	Analítica
20	176642	Baixa	Matemática	Uerj/2018	Analítica