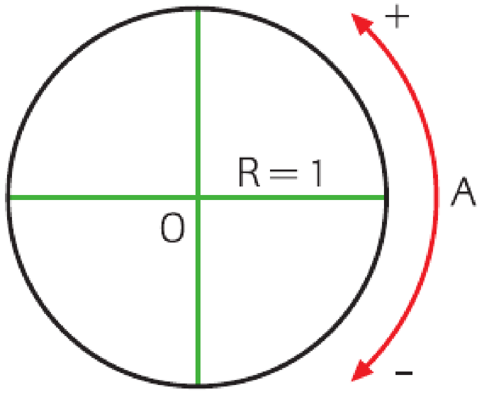
| | |
|---|---|
| | **COLÉGIO PEDRO II – CAMPUS REALENGO II**<br>1ª SÉRIE – MATEMÁTICA II |

# Ciclo trigonométrico

## Ciclo trigonométrico

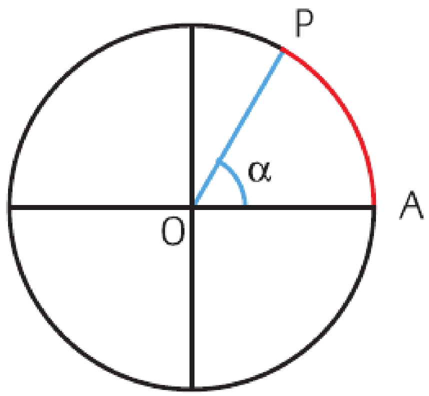
Chamamos de ciclo ou circunferência trigonométrica uma circunferência de raio unitário orientada.




Na referida circunferência, fixamos um ponto (A) como origem dos arcos, convencionamos um sentido (o anti-horário) como sendo o positivo e o horário como sendo negativo.

## Arco trigonométrico

Chamamos de arco trigonométrico ao conjunto de todos os arcos com origem em A e extremidade em P.




Na figura exemplificada, α é a medida de **1ª determinação positiva do arco AP.**

A **primeira determinação positiva de um arco trigonométrico**, é nada mais que uma medida entre 0º e 360º (exclusive) ou entre 0 rad e 2π rad (exclusive).

A **primeira determinação negativa de um arco trigonométrico**, é nada mais que uma medida entre 0º e – 360º (exclusive) ou entre 0 rad e – 2π rad (exclusive).

Analogamente, chamamos de ângulo trigonométrico AÔP ao conjunto de todos os ângulos de lado inicial OA e lado terminal OP.

Aos arcos (ou ângulos) que possuam a mesma origem e a mesma extremidade, denominamos **arcos (ou ângulos) côngruos.**

## Exemplo:

a) 36º como primeira determinação positiva.

36º + 360º = 396º
36º + 720º = 756º
36º + 1080º = 1116º
36º – 360º = - 324º
36º – 720º = - 684º

Ou seja, 36º, 396º, 756º, 1116º, - 324º e – 684 são exemplos de arcos côngruos.

Podemos escrever uma expressão geral dos arcos côngruos da primeira representação positiva de 36º, como:

$\boxed{x = 36^\circ + 360^\circ.k}$

onde *k* é um número inteiro.

b) $\frac{\pi}{3}$ rad como primeira determinação positiva.

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} + 6\pi = \frac{19\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3}$$

Ou seja, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{13\pi}{3}$, $\frac{19\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{3}$ e $-\frac{11\pi}{3}$ são exemplos de arcos côngruos.

Podemos escrever uma expressão geral dos arcos côngruos da primeira representação positiva de $\frac{\pi}{3}$, como:

$x = \frac{\pi}{3}, + 2\pi.k$

Onde *k* é um número inteiro.

c) - 50º como primeira determinação negativa.

-50º + 360º = 310º
-50º + 720º = 670º
-50º + 1080º = 1030º
-50º – 360º = - 410º
-50º – 720º = - 770º

Ou seja, - 50º, 310º, 670º, 1030º -410º e – 770º são exemplos de arcos côngruos.

Podemos escrever uma expressão geral dos arcos côngruos da primeira representação negativa de - 50º, como:

$x = -50^\circ + 360^\circ.k$

onde *k* é um número inteiro.

# Expressão geral de um arco trigonométrico

Seja α a primeira representação positiva (ou negativa) em um arco trigonométrico.

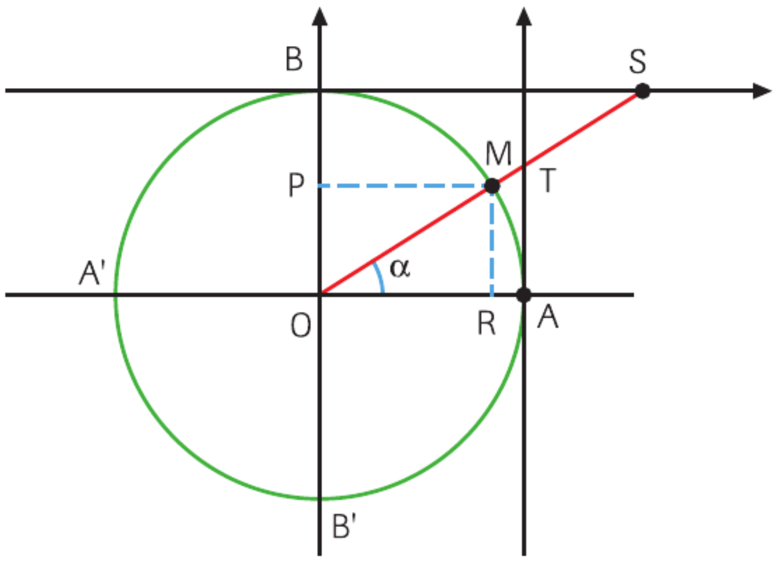
$AP = \alpha + 360^\circ.k$ *(se α tem medida em graus).*

Ou

$AP = \alpha + 2\pi.k$ *(se α tem medida em radianos).*

Observe que quando $k = 0$ temos a primeira determinação *positiva* ou *negativa* do arco *AP.*

# Linhas trigonométricas de um arco



Temos:

*OM = OA = OB = OA' = OB' = 1.*

| |
|---|
| *MR* = ***OP = sen(α)*** |
| ***OR = cos(α)*** |
| ***AT = tg(α)*** |
| ***OS = cossec(α)*** |
| ***OT = sec(α)*** |
| ***BS = cotg(α)*** |

Ao ponto *M* ou a qualquer ponto da circunferência trigonométrica, podemos associar ao par ordenado:

**M = (cos(α), sen(α))**

onde

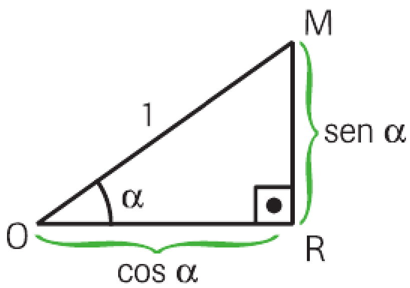
$-1 \leqslant \cos(\alpha) \leqslant 1$ e também $-1 \leqslant sen(\alpha) \leqslant 1$

Podemos tirar diretamente do desenho acima que:

| Ângulo | cosseno | seno | tangente |
|---|---|---|---|
| 0º ou 0 rad | 1 | 0 | 0 |
| 90º ou $\frac{\pi}{2}$ rad | 0 | 1 | Não existe |
| 180º ou $\pi$ rad | -1 | 0 | 0 |
| 270º ou $\frac{3\pi}{2}$ rad | 0 | -1 | Não existe |
| 360º ou $2\pi$ rad | 1 | 0 | 0 |

Podemos usar como auxílio, alguns triângulos retângulos, para memorizar relações trigonométricas fundamentais.

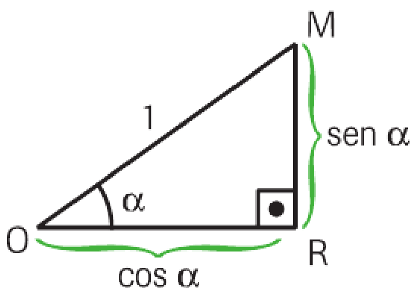
## 1ª Relação fundamental




*[sen(α)]² + [cos(α)]² = 1²  (Teorema de Pitágoras)*

$\boxed{\mathbf{sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1}}$

# 2ª Relação fundamental

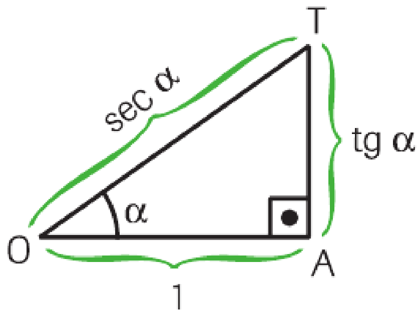



$\boxed{\mathbf{tg(\alpha)} = \dfrac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$

*e*

$\boxed{\mathbf{cotg(\alpha)} = \dfrac{\cos(\alpha)}{sen(\alpha)}}$

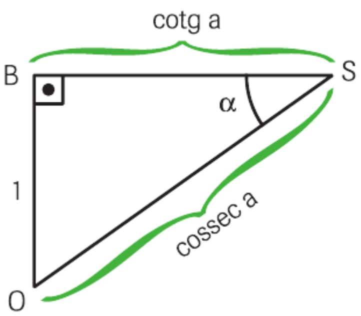
# 3ª Relação fundamental




*$[tg(\alpha)]^2 + 1^2 = [sec(\alpha)]^2$ (Teorema de Pitágoras)*

$\boxed{\mathbf{sec^2(\alpha) = 1 + tg^2(\alpha)}}$

# 4ª Relação fundamental




*$[cotg(\alpha)]^2 + 1^2 = [cossec(\alpha)]^2$ (Teorema de Pitágoras)*

$\boxed{\mathbf{cossec^2(\alpha) = 1 + cotg^2(\alpha)}}$

## Exemplo:

Sendo x um ângulo agudo e sen(x) = 3/5, obter:

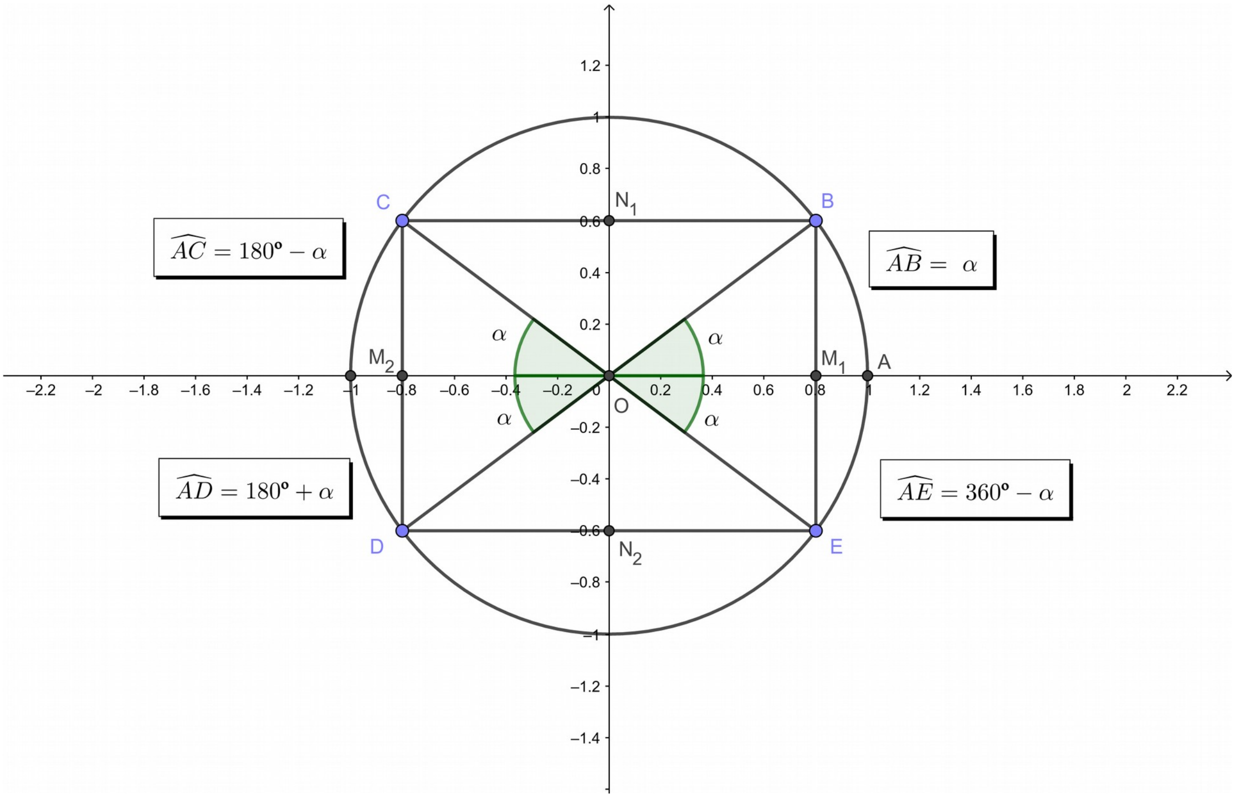
a) cos(x) b) tg (x) c) cotg(x) d) sec(x) e) cossec(x)

## Gabarito

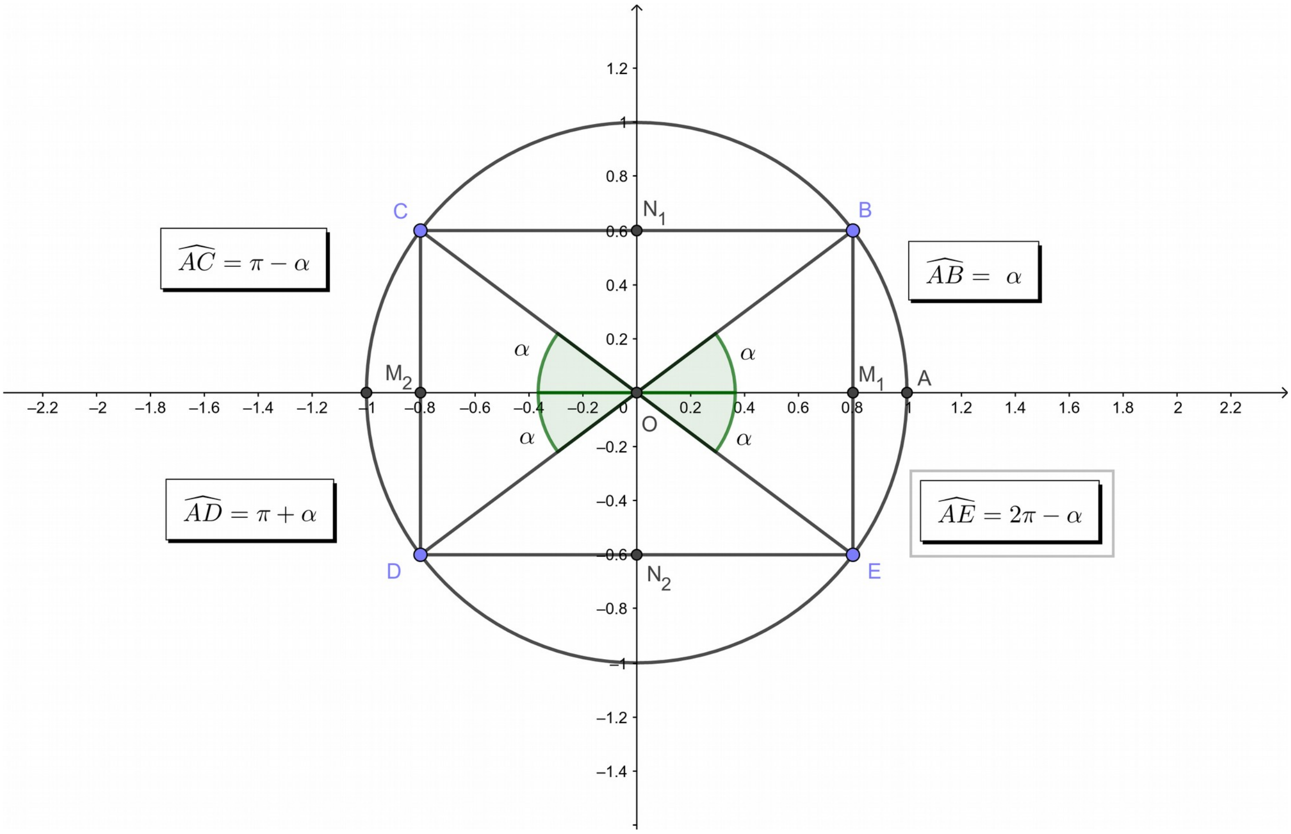
a) 4/5 b) ¾ c) 4/3 d) 5/4 e) 5/3

# Redução ao 1º quadrante

Em graus:



Em radianos:




Em graus:

| **<u>2º QUADRANTE</u>** | **<u>3º QUADRANTE</u>** | **<u>4º QUADRANTE</u>** |
|---|---|---|
| sen(180º – α) = sen(α) | sen(180º + α) = - sen(α) | sen(360º - α) = - sen(α) |
| cos(180º – α) = - cos(α) | cos(180º + α) = - cos(α) | cos(360º - α) = cos(α) |
| tg(180º – α) = - tg(α) | tg(180º + α) = tg(α) | tg(360º – α) = - tg(α) |

Em radianos:

| **<u>2º QUADRANTE</u>** | **<u>3º QUADRANTE</u>** | **<u>4º QUADRANTE</u>** |
|---|---|---|
| sen(π – α) = sen(α) | sen(π + α) = - sen(α) | sen(2π - α) = - sen(α) |
| cos(π– α) = - cos(α) | cos(π + α) = - cos(α) | cos(2π- α) = cos(α) |
| tg(π – α) = - tg(α) | tg(π + α) = tg(α) | tg(2π – α) = - tg(α) |

## Exemplo:

Determine *seno*, *cosseno* e *tangente* de:

a) 330º b) 240º c) 135º d) $\frac{5\pi}{3}$ rad e) 90º f) 180º g) $\frac{3\pi}{2}$ rad

h) 150º i) 210º j) 300º k) $2\pi$ rad l) $\frac{3\pi}{2}$ rad m) $\pi$ rad

## Exercícios

01) O valor da expressão $25.sen^2x-9.tg^2x$, sabendo que $cossec\,x=\frac{5}{4}$ e que x é um ângulo agudo é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 0 e) 1

02) A menor determinação positiva de –4900º é:

a) 100º b) 140º c) 40º d) 80º e) 30º

03) Qual a 1ª determinação positiva de um arco de 1000º?

04) O menor arco não negativo côngruo do arco de 1425º mede:

a) 315º b) 345º c) 45º d) 75º e) 15º

05) Se $senx=\frac{3}{5}$, com x pertencente ao 4º quadrante, determine:

a) cos x b) tg x c) sec x d) cossec x e) cotg x

06) Se $tg\,x=\frac{1}{2}$ e x é um arco do terceiro quadrante, então determine cosx.