

# ESTATÍSTICA E PROBABILIDADES



Aluno(a): \_\_\_\_\_  
 Turma: \_\_\_\_\_  
 Professores: Edu/Vicente  
 Data: \_\_\_\_\_

--	--

## Noções de Estatística

**Podemos entender a Estatística como sendo o método de estudo de comportamento coletivo, cujas conclusões são traduzidas em resultados numéricos. Podemos, intuitivamente, dizer que:**

Estatística é uma forma de traduzir o comportamento coletivo em números.

Universo Estatístico ou População Estatística: Conjunto formado por todos os elementos que possam oferecer dados pertinentes ao assunto em questão.

Exemplo 1: Um partido político quer saber a tendência do eleitorado quanto a preferência entre dois candidatos à Presidência da República. O Universo Estatístico é o conjunto de todos os eleitores brasileiros.

Amostra: É um subconjunto da população estatística. Quando o Universo Estatístico é muito vasto ou quando não é possível coletar dados de todos os seus elementos, retira-se desse universo um subconjunto chamado amostra. Os dados são coletados dessa amostra.

Exemplo 2: “Numa pesquisa para saber a intenção de votos para presidente da república, foram ouvidas 400 pessoas...”

- Esse grupo de 400 pessoas é uma amostra.
- Cada pessoa ouvida nessa pesquisa é uma unidade estatística.
- Cada informação numérica obtida nessa pesquisa é um dado estatístico.

Rol: É toda seqüência de dados numéricos colocados em ordem não decrescente ou não crescente.

Exemplo 3: Os 5 alunos de uma amostra apresentam as seguintes notas de matemática:

6; 4; 8; 7; 8

O rol desses resultados é : (4; 6; 7; 8; 8) ou (8; 8; 7; 6; 4).

Frequência absoluta: ( $F$ ) É o número de vezes que um determinado valor é observado na amostra.

Frequência total: É a soma de todas as frequências absolutas. ( $F_t$ )

Frequência relativa: ( $F_r$ )

É o quociente  $F_r = \frac{F}{F_t}$  ou  $F_r = \frac{F}{F_t} \times 100\%$ .

Exemplo 3:

Numa turma foram registradas as idades de todos os 25 alunos. Qual a frequência absoluta e a frequência relativa do número de alunos de 14 anos:

15	16	16	15	14
15	17	16	14	14
14	17	15	16	15
16	14	15	15	15
16	15	15	16	17

Solução;  
Tabela de frequências:

Idade	Frequência absoluta	Frequência relativa(%)
14	5	$(5/25).100\%$ =20%
15	10	$(10/25).100\%$ =40%
16	7	$(7/25).100\%$ =28%
17	3	$(3/25).100\%$ =12%
Total	25	100%

Resposta:  $F = 5$  e  $F_r = 20\%$

Medidas de Centralização:  
(Média, Mediana, Moda)

Média Aritmética: Considere a seguinte situação:

A tabela abaixo mostra as notas de matemática de um aluno em um determinado ano:

1º Bimestre	3,5
2º Bimestre	7,5
3º Bimestre	9,0
4º Bimestre	6,0

**A média aritmética dessas notas é dada por:**

$$\bar{x} = \frac{3,5 + 7,5 + 9 + 6}{4} = \frac{26}{4} = 6,5$$

Obs.: Ter média 6,5 significa dizer que, apesar de ele ter obtido notas mais altas ou mais baixas em outros bimestres, a soma das notas (26) é a mesma que ele alcançaria se tivesse obtido nota 6,5 em todos os bimestres.

Média Ponderada: Considere a seguinte situação:

Cinco baldes contêm 4 litros de água cada um, três outros 2 litros de água, cada um e, ainda, dois outros contêm 5 litros de água, cada um. Se toda essa água fosse distribuída igualmente em cada um dos baldes, com quantos litros ficaria cada um?

Solução:

A quantidade de litros que ficaria em cada balde é a média aritmética ponderada:

$$\bar{x}_p = \frac{4l \times 5 + 2l \times 3 + 5l \times 2}{5 + 3 + 2} = 3,6l$$

Ou seja, a quantidade, em litros, de água em cada balde é chamada de média ponderada dos valores 4 litros, 2 litros e 5 litros, com pesos 5; 3 e 2.

Generalizando:

**Média Aritmética:**

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

**Média Aritmética Ponderada:**

$$\bar{x}_p = \frac{x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

ou

$$\bar{x}_p = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i}{\sum_{i=1}^n P_i}$$

Mediana:

Considere a seguinte situação:

Os salários de 5 pessoas que trabalham em uma empresa são: \$700,00 ; \$800,00 ; \$900,00 ; \$1.000,00 e \$5.600,00. O salário médio dessas 5 pessoas é:

$$\bar{x} = \frac{700 + 800 + 900 + 1000 + 5600}{5} = 1.800 \text{ Parece}$$

lógico que, neste caso, a média aritmética não é a melhor medida de centralização para representar esse conjunto de dados, pois a maioria dos salários é bem menor que \$1.800,00. Em algumas situações a mediana é um número mais representativo. A mediana é o termo central do rol. Logo, escrevendo o rol dos dados numéricos dessa situação, temos:

(700; 800; 900; 1000; 5600)

Logo, o termo central desse rol é "900". Então a mediana é

igual a 900.

Se acrescentarmos à lista o salário de \$1.000,00 de outro funcionário, ficaríamos com um número par de dados numéricos. Nesse caso, a mediana seria a média aritmética dos termos centrais:

(700; 800; 900; 1000; 1000; 5600)

Logo a mediana é dada por:

$$\text{mediana} = \frac{900 + 1000}{2} = 950,00$$

Podemos interpretar esse resultado da seguinte maneira:

Metade dos funcionários ganha menos de \$950,00 e a outra metade mais de \$950,00.

Generalizando:

Se  $n$  é ímpar, a mediana é o termo central do rol.

Se  $n$  é par, a mediana é a média aritmética dos termos centrais do rol.

**Moda:** Voltemos ao exemplo 3, onde foram registradas as idades de 25 alunos de uma turma.

15	16	16	15	14
15	17	16	14	14
14	17	15	16	15
16	14	15	15	15
16	15	15	16	17

A idade de maior frequência é a de 15 anos. Por isso dizemos que a Moda dessa amostra é de 15 anos e indicamos

$$M_o = 15$$

**Definição:** Em uma amostra cujas frequências dos elementos não são todas iguais, chama-se moda, que se indica por  $M_o$ , todo elemento de maior frequência possível.

**Exemplo 4**

- Na amostra (3; 4; 7; 3; 7; 9; 7) a moda é

$$M_o = 7$$

- Na amostra (9; 9; 5; 7; 10; 22; 1; 10) Aqui temos duas modas  $M_o = 9$  e

$$M_o = 10 \text{ (amostra bimodal)}$$

- Na amostra (1; 3; 5; 7; 9) não apresenta moda, pois todos os elementos tem a mesma frequência.

### Medidas de Dispersão

Considere a seguinte situação:

Dois candidatos disputam uma única vaga em uma empresa.

Foram realizados vários testes com esses dois candidatos:

Eduardo e Vicente. A tabela a seguir mostra os desempenhos dos dois candidatos nas provas a que se submeteram:

	Eduardo	Vicente
Português	8,5	9,5
Matemática	9,5	9,0
Informática	8,0	8,5
Inglês	7,0	8,0
Economia	7,0	5,0

Note que as médias de Eduardo e Vicente são iguais:

Eduardo:

$$\bar{x}_E = \frac{8,5 + 9,5 + 8 + 7 + 7}{5} = 8,0$$

Vicente:

$$\bar{x}_V = \frac{9,5 + 9 + 8,5 + 8 + 5}{5} = 8,0$$

Os dois candidatos obtiveram a mesma média. Como proceder cientificamente para determinar qual dos dois teve o melhor desempenho na avaliação?

A comparação entre os dois desempenhos pode ser feita através das seguintes medidas estatísticas:

## I) Desvio absoluto médio(D.AM.) :

Determina o quanto cada nota está afastada da média. Essas diferenças são chamadas de desvio:

Eduardo:

$$\text{D.AM.} = \frac{|8,5 - 8| + |9,5 - 8| + |8 - 8| + |7 - 8| + |7 - 8|}{5} = 0,8$$

Vicente:

$$\text{D.AM.} = \frac{|9,5 - 8| + |9 - 8| + |8,5 - 8| + |8 - 8| + |5 - 8|}{5} = 1,2$$

Logo, as notas de Eduardo estão, em média, 0,8 acima ou abaixo da média, enquanto as notas de Vicente estão, em média, 1,2 acima ou abaixo da média aritmética (8,0). Isso mostra que as notas de Eduardo são menos dispersas que as notas de Vicente. Então: Eduardo merece a vaga.

II) Variância ( $\delta^2$ )

É uma outra medida estatística que indica o afastamento de uma amostra em relação a média aritmética. Define-se Variância como a média aritmética dos quadrados dos desvios dos elementos da amostra:

Eduardo:

$$\delta^2 = \frac{(8,5 - 8)^2 + (9,5 - 8)^2 + (8 - 8)^2 + 2(7 - 8)^2}{5} = 0,9$$

Vicente:

$$\delta^2 = \frac{(9,5 - 8)^2 + (9 - 8)^2 + (8,5 - 8)^2 + (8 - 8)^2 + (5 - 8)^2}{5} = 2,5$$

$$\delta^2 = 2,5$$

Logo, por esse processo, Eduardo também teve um desempenho mais regular.

III) Desvio Padrão ( $\delta$ ):

É a raiz quadrada da Variância.

Eduardo:

$$\delta = \sqrt{0,9} = 0,94868$$

Vicente:

$$\delta = \sqrt{2,5} = 1,58114$$

Logo, por esse processo, as notas de Eduardo são menos dispersas que as notas de Vicente.

Conclusão: Eduardo é sempre melhor que Vicente.

Probabilidade de um Evento E em um Espaço Equiprovável

$$P(E) = \frac{\text{Número de Casos Favoráveis}}{\text{Número de Casos Possíveis}}$$

Obs.: Se um Espaço Amostral "S" é formado pelos eventos simples  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , então:

$$P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_n) = 1$$

## Exercícios

1) Os salários dos funcionários de uma empresa estão distribuídos na tabela abaixo:

Salário	Frequência
\$400,00	5
\$600,00	2
\$1.000,00	2
\$5.000,00	1

Determine o salário médio, o salário mediano e o salário modal.

2) As notas de um candidato em suas provas de um concurso foram: 8,4; 9,1; 7,2; 6,8; 8,7 e 7,2.

A nota média, a nota mediana e a nota modal desse aluno, são respectivamente:

- 7,9; 7,8; 7,2
- 7,2; 7,8; 7,9
- 7,8; 7,8; 7,9
- 7,2; 7,8; 7,9
- 7,8; 7,9; 7,2

## 3) (FUVEST)

Num determinado país a população feminina representa 51% da população total. Sabendo-se que a idade média (média aritmética das idades) da população feminina é de 38 anos e a da masculina é de 36 anos. Qual a idade média da população?

- a) 37,02 anos
- b) 37,00 anos
- c) 37,20 anos
- d) 36,60 anos
- e) 37,05 anos

4) Um dado foi lançado 50 vezes. A tabela a seguir mostra os seis resultados possíveis e as suas respectivas freqüências

Resultado	1	2	3	4	5	6
Freqüência	7	9	8	7	9	10

de ocorrências:

A freqüência de aparecimento de um resultado ímpar foi de:

- a) 2/5
- b) 11/25
- c) 12/25
- d) 1/2
- e) 13/25

5) Em tempo de eleição para presidente, foram ouvidas 400 pessoas quanto a intenção de voto. Cada pessoa ouvida nessa pesquisa constitui um(a):

- a) dado estatístico
- b) unidade estatística
- c) amostra representativa
- d) freqüência

6) Um conjunto de dados numéricos tem variância igual a zero. Podemos concluir que:

- a) a média também vale zero.
- b) a mediana também vale zero.
- c) a moda também vale zero.

d) o desvio padrão também vale zero.

e) todos os valores desse conjunto são iguais a zero.

7) (UnB) A tabela adiante apresenta o levantamento das quantidades de peças defeituosas para cada lote de 100 unidades fabricadas em uma linha de produção de autopeças,

Dia	Nº de peças defeituosas	Dia	Nº de peças defeituosas	Dia	Nº de peças defeituosas
1	6	11	1	21	2
2	4	12	5	22	6
3	3	13	4	23	3
4	4	14	1	24	5
5	2	15	3	25	2
6	4	16	7	26	1
7	3	17	5	27	3
8	5	18	6	28	2
9	1	19	4	29	5
10	2	20	3	30	7

durante um período de 30 dias úteis.

Considerando S a série numérica de distribuição de freqüências de peças defeituosas por lote de 100 unidades, julgue os itens abaixo.

(1) A moda da série S é 5. ( )

(2) Durante o período de levantamento desses dados, o percentual de peças defeituosas ficou, em média, abaixo de 3,7%.

( )

(3) Os dados obtidos nos 10 primeiros dias do levantamento geram uma série numérica de distribuição de freqüências com a mesma mediana da série S. ( )

8) Um dado é viciado de tal forma que a probabilidade de cada face é proporcional ao número de pontos daquela face. Qual a probabilidade de ser obter um número par de pontos no lançamento desse dado?

9) A tabela traz as idades, em anos, dos filhos de 5 mães.

Mãe	Ana	Márcia	Cláudia	Lúcia	Heloísa
			a		a
Idade dos filhos	7; 10; 12	11; 15	8; 10; 12	12; 14	9; 12; 15; 16; 18

A idade modal desses 15 filhos é inferior à idade média dos filhos de Heloísa em \_\_\_\_ ano(s).

- a) 4 b) 3 c) 2 d) 1

10) A probabilidade de um casal ter um filho do sexo masculino é 0,25. Determine a probabilidade do casal ter dois filhos de sexos diferentes.

11) Considere as seguintes medidas descritivas das notas finais dos alunos de três turmas:

TURMA	NÚMERO DE ALUNOS	MÉDIA	DESVIO PADRÃO
A	15	6.0	1.31
B	15	6.0	3.51
C	14	6.0	2.61

Com base nesses dados, considere as seguintes afirmativas:

1. Apesar de as médias serem iguais nas três turmas, as notas dos alunos da turma B foram as que se apresentaram mais heterogêneas.
2. As três turmas tiveram a mesma média, mas com variação diferente.
3. As notas da turma A se apresentaram mais dispersas em torno da média.

Assinale a alternativa correta.

- a) Somente a afirmativa 3 é verdadeira.
- b) Somente a afirmativa 2 é verdadeira.
- c) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
- d) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
- e) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.

## 12) ENEM

O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então

- A)  $X = Y < Z$ .
- B)  $Z < X = Y$ .
- C)  $Y < Z < X$ .
- D)  $Z < X < Y$ .
- E)  $Z < Y < X$ .

## 13) ENEM

Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para classificação no concurso o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos.

Dados dos candidatos no concurso

	Matemática	Português	Conhecimentos Gerais	Média	Mediana	Desvio Padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

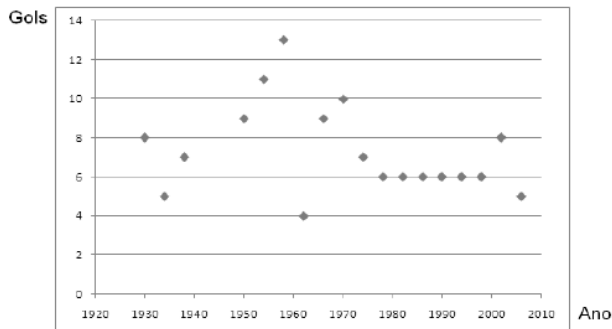
O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é

- A) Marco, pois a média e a mediana são iguais.
- B) Marco, pois obteve o menor desvio padrão.
- C) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 pontos em Português.
- D) Paulo, pois obteve a maior mediana.
- E) Paulo, pois obteve maior desvio padrão.

**14) ENEM**

O gráfico apresenta a quantidade de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo desde a Copa de 1930 até a de 2006.

**Quantidades de Gols dos Artilheiros das Copas do Mundo**



Disponível em: <http://www.suapesquisa.com>. Acesso em: 23 abr. 2010 (adaptado).

A partir dos dados apresentados, qual a mediana das quantidades de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo?

- A) 6
- B) 6,5
- C) 7
- D) 7,3
- E) 8,5

**15) (ENEM)**

**Questão 76**

Depois de jogar um dado em forma de cubo e de faces numeradas de 1 a 6, por 10 vezes consecutivas, e anotar o número obtido em cada jogada, construiu-se a seguinte tabela de distribuição de frequências.

NÚMERO OBTIDO	FREQUÊNCIA
1	4
2	1
4	2
5	2
6	1

A média, mediana e moda dessa distribuição de frequências são, respectivamente

- (A) 3, 2 e 1
- (B) 3, 3 e 1
- (C) 3, 4 e 2
- (D) 5, 4 e 2
- (E) 6, 2 e 4

**16) (ENEM)**

**Questão 50**

Cinco equipes A, B, C, D e E disputaram uma prova de ginástica na qual as pontuações recebidas podiam ser 0, 1, 2 ou 3. A média das cinco equipes foi de 2 pontos.

As notas das equipes foram colocadas no gráfico a seguir, entretanto, esqueceram de representar as notas da equipe D e da equipe E.

Mesmo sem aparecer as notas das equipes D e E, pode-se concluir que os valores da moda e da mediana são, respectivamente,

- (A) 1,5 e 2,0
- (B) 2,0 e 1,5
- (C) 2,0 e 2,0
- (D) 2,0 e 3,0
- (E) 3,0 e 2,0



**17) (ENEM)**

Na tabela, são apresentados dados da cotação mensal do ovo extra branco vendido no atacado, em Brasília, em reais, por caixa de 30 dúzias de ovos, em alguns meses dos anos 2007 e 2008.

Mes	Cotação	Ano
Outubro	R\$ 83,00	2007
Novembro	R\$ 73,10	2007
Dezembro	R\$ 81,60	2007
Janeiro	R\$ 82,00	2008
Fevereiro	R\$ 85,30	2008
Março	R\$ 84,00	2008
Abril	R\$ 84,60	2008

De acordo com esses dados, o valor da mediana das cotações mensais do ovo extra branco nesse período era igual a

- A R\$ 73,10.
- B R\$ 81,50.
- C R\$ 82,00.
- D R\$ 83,00.
- E R\$ 85,30.

**18) (ENEM)**

**Questão 82**

No quadro seguinte, são informados os turnos em que foram eleitos os prefeitos das capitais de todos os estados brasileiros em 2004.

	cidade	turno		cidade	turno		cidade	turno
1	Aracaju (SE)	1.º	10	Goiania (GO)	2.º	19	Recife (PE)	1.º
2	Belém (PA)	2.º	11	João Pessoa (PB)	1.º	20	Rio Branco (AC)	1.º
3	Belo Horizonte (MG)	1.º	12	Macapá (AP)	1.º	21	Rio de Janeiro (RJ)	1.º
4	Boa Vista (RR)	1.º	13	Maceió (AL)	2.º	22	Salvador (BA)	2.º
5	Campo Grande (MS)	1.º	14	Manaus (AM)	2.º	23	São Luís (MA)	1.º
6	Cuiabá (MT)	2.º	15	Natal (RN)	2.º	24	São Paulo (SP)	2.º
7	Curitiba (PR)	2.º	16	Palmas (TO)	1.º	25	Teresinha (PI)	2.º
8	Florianópolis (SC)	2.º	17	Porto Alegre (RS)	2.º	26	Vitória (ES)	2.º
9	Fortaleza (CE)	2.º	18	Porto Velho (RO)	2.º			

Fonte: TSE

Almanaque ABRIL: Brasil 2005. São Paulo: Abril, 2005.

Na região Norte, a frequência relativa de eleição dos prefeitos no 2º turno foi, aproximadamente,

- (A) 42,86%
- (B) 44,44%
- (C) 50,00%
- (D) 57,14%
- (E) 57,69%

19. (Ufpr 2006) O serviço de atendimento ao consumidor de uma concessionária de veículos recebe as reclamações dos clientes via telefone. Tendo em vista a melhoria nesse serviço, foram anotados os números de chamadas durante um período de sete dias consecutivos. Os resultados obtidos foram os seguintes:

Dia	Número de chamadas
domingo	3
segunda	4
terça	6
quarta	9
quinta	5
sexta	7
sábado	8

Sobre as informações contidas nesse quadro, considere as seguintes afirmativas:

I. O número médio de chamadas dos últimos sete dias foi 6.

II. A variância dos dados é 4.

III. O desvio padrão dos dados é  $\sqrt{2}$ .

Assinale a alternativa correta.

- Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
- Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
- Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
- Somente a afirmativa I é verdadeira.
- As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

20. (Enem 2ª aplicação 2010) Em uma corrida de regularidade, a equipe campeã é aquela em que o tempo dos participantes mais se aproxima do tempo fornecido pelos organizadores em cada etapa. Um campeonato foi organizado em 5 etapas, e o tempo médio de prova indicado pelos organizadores foi de 45 minutos por prova. No quadro, estão representados os dados estatísticos das cinco equipes mais bem classificadas

**Dados estatísticos das equipes mais bem classificadas (em minutos)**

Equipes	Média	Moda	Desvio-Padrão
Equipe I	45	40	5
Equipe II	45	41	4
Equipe III	45	44	1
Equipe IV	45	44	3
Equipe V	45	47	2

Utilizando os dados estatísticos do quadro, a campeã foi a equipe

- I.
- II.
- III.
- IV.
- V.

21). (FUVEST-93) A distribuição dos salários de uma empresa é dada na tabela a seguir:

Salário(em reais)	Número de funcionários
500,00	10
1.000,00	5
1.500,00	1
2.000,00	10
5.000,00	4
10.500,00	1
Total	31

a) Qual é a média, a moda e a mediana dos salários dessa empresa?

b) Suponha que sejam contratados dois novos funcionários com salários de R\$2.000,00 cada, A variância da nova distribuição de salários ficará menor, igual ou maior que a anterior?

22. (FUVEST) Numa classe com 20 alunos, as notas do exame final podiam variar de 0 a 100 e a nota mínima para aprovação era 70. Realizado o exame, verificou-se que oito alunos foram reprovados. A média aritmética das notas destes 8 alunos foi 65, enquanto a média dos aprovados foi 77. Após a divulgação dos resultados, o professor verificou que uma questão havia sido mal formulada e decidiu atribuir 5 pontos a mais para todos os alunos. Com essa decisão, a média dos aprovados passou a ser 80 e a dos reprovados 68,8.

a) Calcule a média das notas da classe toda antes da atribuição dos 5 pontos extras.

b) Com a atribuição dos 5 pontos extras, quantos alunos, inicialmente reprovados, atingiram a nota para a aprovação?

**Gabarito:**

1) O Salário médio é igual a \$1.020,00 ( )

O Salário mediano é igual a \$500,00 ( )

O Salário modal é de \$400,00 ( )

2) [A] 3) [A] 4) [C] 5) [B]

6) [D] 7) E; C; C; 8)  $\frac{4}{7}$  9) C 10)  $\frac{3}{8}$  11) D

12) E 13) B 14) B 15) B 16) C 17) D 18) A 19) B 20) C

21) A) média=2.000,00; mediana=1.500,00 e Moda= R\$500,00 e

Moda =R\$2.000,00(BIMODAL)

B) A variância diminui.

22. A) 72,2 B) 3