Ponto de Apoio

UERJ 2018 | ENEM 2018 | PISM 2018

Galois

Gauss

POLINÔMIOS E EQUAÇÕES

24/3/2018

del Ferro (1465-1526) | Tartaglia (1499-1557) | Cardano (1501-1576) | Ferrari (1522-1565)

Abel

Euler

Prof. Walter Tadeu
www.professorwaltertadeu.mat.br

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS PARA FATORAR

$$x^3 - x^2 - 2x + 2$$

$$x^4 - x^3 + 5x^2 - 16x + 4$$

$$x^5 - x^3 - 8x^2 + 8$$

$$x^6 - x^4 - x^2 + 4$$

EQUAÇÕES

- $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$
- $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 16x + 4 = 0$
- $x^5 - x^3 - 8x^2 + 8 = 0$
- $x^6 - 4x^4 - x^2 + 4 = 0$

DIVISÃO DE P(x) por d(x) = x - a

ALGORITMO DE BRIOT-RUFFINI

Sejam $P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + a_1.x + a_0$ e $Q(x) = b_n.x^{n-1} + b_{n-1}.x^{n-2} + \ldots + b_2.x + b_1$ o quociente da divisão de P(x) por **(x – c)**, cujo resto denominaremos **r**.

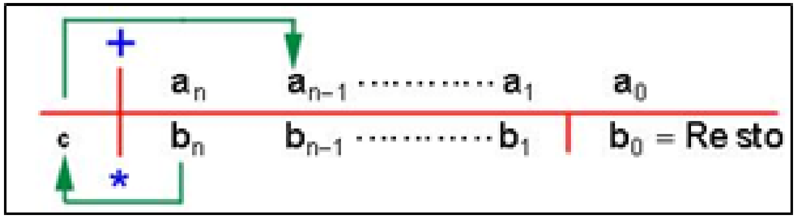
Aplicando a relação fundamental da divisão, temos: $\boxed{P(x) = \left(b_n.x^{n-1} + b_{n-1}.x^{n-2} + \ldots + b_2.x + b_1\right)(x - c) + r}$.

Logo,
$$\boxed{\begin{array}{l} P(x) = \left(b_n.x^{n-1} + b_{n-1}.x^{n-2} + \ldots + b_2.x + b_1\right)(x) - \left(b_n.x^{n-1} + b_{n-1}.x^{n-2} + \ldots + b_2.x + b_1\right)(c) + r \\ P(x) = \left(b_n.x^{n} + b_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + b_2.x^2 + b_1.x\right) - \left(c.b_n.x^{n-1} + c.b_{n-1}.x^{n-2} + \ldots + c.b_2.x + c.b_1\right) + r \\ P(x) = b_n.x^n + \left(b_{n-1} - c.b_n\right)x^{n-1} + \ldots + \left(b_1 - c.b_2\right)x + \left(r - c.b_1\right) \end{array}}.$$

Pelo princípio da identidade de polinômios, efetuando-se o produto e igualando-se membro a membro os coeficientes com a mesma potência, obtemos o algoritmo de BRIOT-RUFFINI.

$$\begin{cases} P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + a_1.x + a_0 \\ P(x) = b_n.x^n + \left(b_{n-1} - c.b_n\right)x^{n-1} + \ldots + \left(b_1 - c.b_2\right)x + \left(r - c.b_1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n = a_n \\ b_{n-1} - c.b_n = a_{n-1} \Rightarrow b_{n-1} = a_{n-1} + c.b_n \\ \ldots \\ b_1 - c.b_2 = a_1 \Rightarrow b_1 = a_1 + c.b_2 \\ r - c.b_1 = a_0 \Rightarrow r = a_0 + c.b_1 \end{cases}$$

O esquema mostrado é mais prático, pois dispõe os coeficientes de forma a economizar tempo com operações.



RESULTADOS IMPORTANTES

TEOREMA DO RESTO: O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ pelo binômio $(x - \mathbf{a})$ é igual a $P(\mathbf{a})$.

Demonstração: O quociente da divisão de $P(x)$ por $(x - \mathbf{a})$ é um polinômio $Q(x)$ de grau inferior de uma unidade ao do polinômio $P(x)$ e o resto $R(x)$ é um número constante R, assim podemos escrever:

$\mathbf{P(x) = (x - a).Q(x) + R}$. Para $x = \mathbf{a}$ temos: $P(\mathbf{a}) = (\mathbf{a} - \mathbf{a}).Q(\mathbf{a}) + \mathbf{R}$. Logo, $\mathbf{P(a) = R}$.

Teorema Fundamental da Álgebra: Toda a equação algébrica $P(x) = 0$ de grau $n > 0$, admite pelo menos uma raiz real ou complexa.

OBS: Equações de 5º grau ou maiores não possuem fórmulas para a sua solução direta.

Teorema da Decomposição: Todo o polinômio de grau $\mathbf{n}$ tem exatamente $\mathbf{n}$ raízes reais e complexas.

Demonstração: Pelo teorema fundamental, $P(x)$ tem pelo menos uma raiz. Seja ela $\mathbf{r_1}$.

Logo, $\mathbf{P(x) = (x - r_1).Q(x)}$

Repare que $Q(x)$ é um novo polinômio de grau $(\mathbf{n - 1})$, que possui, também, pelo menos uma raiz. Seja ela $\mathbf{r_2}$.

Logo, $\mathbf{Q(x) = (x - r_2).Q_1(x)}$. Fazendo o mesmo procedimento com $\mathbf{q_1(x)}$ e continuando até a n-ésima expressão temos: $\mathbf{Q_{n-1}(x) = (x - r_n).Q_n(x)}$.

Em $\mathbf{Q_n}$ o grau do polinômio será zero e $\mathbf{Q_n}$ será igual a uma constante que chamamos de $\mathbf{a_n}$.

Substituindo todas as equações obtidas na decomposição de $P(x)$, temos: $\mathbf{P(x) = a_n.(x - r_1).(x - r_2). \ldots (x - r_n)}$

<u>Multiplicidade de uma raiz</u>: Quando decompomos P(x) uma mesma raiz ocorrer mais de uma vez sendo denominada de raiz múltipla de P(x).

<u>Exemplo</u>: Se **P(x) = (x – 1)²·(x – 3)** dizemos, nesse caso, que das 3 raízes de P(x), **<u>1 tem multiplicidade 2</u>** enquanto que **<u>3 é uma raiz simples</u>**.

<u>Teorema das raízes complexas</u>: Se uma equação **P(x) = 0**, de coeficientes **<u>reais</u>**, apresentar uma raiz complexa (**a + bi**), podemos afirmar que o seu conjugado (**a – bi**) também será raiz de P(x), e com a mesma multiplicidade.

<u>Demonstração:</u> Seja z = a + bi **raiz de P(x)** então, **P(z) = 0**. P(Z) = $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$

Lembrando as propriedades dos números complexos:

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{z^n} = \bar{z}^n \\ \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \ldots + \bar{z}_n = \overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_n} \end{array}}$$

Assim: $P(\bar{z}) = a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \ldots + a_1 \bar{z} + a_0$

Utilizando-se as propriedades e sabendo-se que o conjugado de um número real é igual a ele mesmo, então:

$\overline{P(z)} = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}$. Logo, $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$. Mas P(z) = 0. Logo, $\overline{P(z)} = P(\bar{z}) = \bar{0} = 0$.

<u>Consequência:</u> Um polinômio de grau ímpar com coeficientes reais, sempre terá pelo menos uma raiz real.

Relações de Girard

i) **Equações do 2º grau**: Considere a equação $ax^2+bx+c=0$ com $a\neq 0$, **a**, **b**, e **c** coeficientes complexos para $x\in C$ e raízes x_1 e x_2. Pelo teorema da composição, $ax^2+bx+c=a(x-x_1).(x-x_2)$. Dividindo ambos os membros por **a** ($a\neq 0$), desenvolvendo o produto do 2º membro e observando a identidade dos polinômios (igualando coeficientes de mesmo grau), temos:

$$\begin{cases} x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0 \\ (x-x_1).(x-x_2)=x^2-x.x_1-x.x_2+x_1.x_2=x^2-(x_1+x_2)x+x_1.x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\rightarrow Soma \\ x_1.x_2=\dfrac{c}{a}\rightarrow \text{Produto} \end{cases}$$

ii) **Equações do 3º grau**: Considere a equação $ax^3+bx^2+cx+d=0$ com $a\neq 0$, **a**, **b**, **c** e **d** coeficientes complexos para $x\in C$ e raízes x_1, x_2 e x_3. Temos, $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1).(x-x_2).(x-x_3)$. Com o mesmo procedimento anterior desenvolvendo separadamente o 2º membro, temos:

$$(x-x_1).(x-x_2).(x-x_3)=\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1.x_2\right](x-x_3)=x^3-(x_1+x_2)x^2+x.x_1.x_2-$$
$$-x^2.x_3+(x_1+x_2)x.x_3-x_1.x_2.x_3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-x_1).(x-x_2).(x-x_3)=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1.x_2+x_1.x_3+x_2.x_3).x-x_1.x_2.x_3$$

Comparando com a equação do 1º membro, igualando os coeficientes, vem:

$$\begin{cases} x^3+\dfrac{b}{a}x^2+\dfrac{c}{a}x+\dfrac{d}{a}=0 \\ x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1.x_2+x_1.x_3+x_2.x_3).x-x_1.x_2.x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}\rightarrow Soma \\ x_1.x_2+x_1.x_3+x_2.x_3=\dfrac{c}{a}\rightarrow SP(2) \\ x_1.x_2.x_3=-\dfrac{d}{a}\rightarrow \text{Produto} \end{cases}$$

Relações de Girard

iii) **Equações do 4º grau**: Considere a equação $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ com $a \neq 0$, **a**, **b**, **c**, **d**, **e** coeficientes complexos para $x \in C$ e raízes x_1, x_2, x_3 e x_4. Fazendo uma analogia com o encontrado na equação do 3º grau, temos: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - x_1).(x - x_2).(x - x_3).(x - x_4)$. As relações são:

$$\begin{cases} x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0 \\ x^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x^3 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2.x_3 + x_2.x_4 + x_3.x_4)x^2 - \\ -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)x + x_1.x_2.x_3 \end{cases}$$

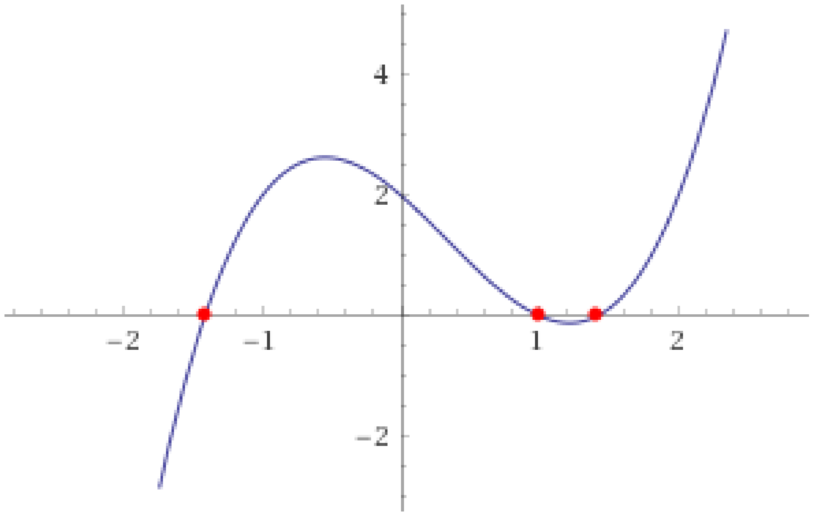
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} \to Soma \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2.x_3 + x_2.x_4 + x_3.x_4 = \frac{c}{a} \to SP(2) \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a} \to SP(3) \\ x_1.x_2.x_3.x_4 = \frac{e}{a} \to \Pr oduto \end{cases}$$

SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES

$$x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x^2(x-1) - 2.(x-1) = 0$$

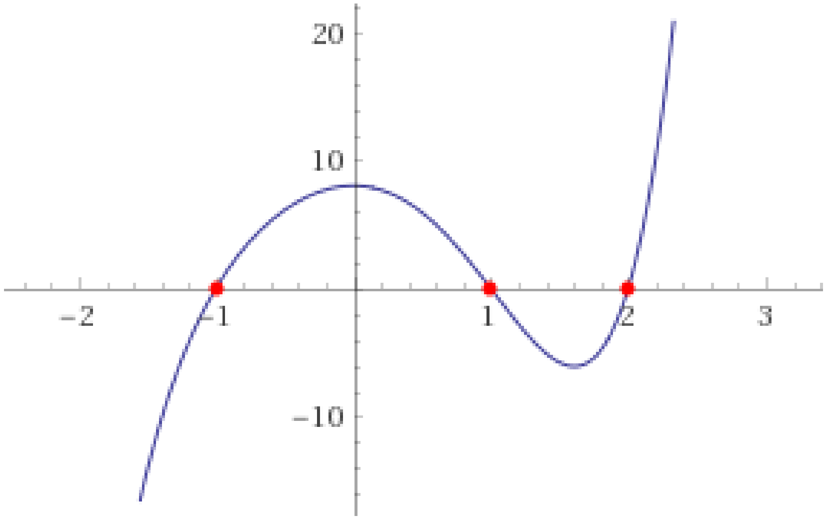
$$(x^2-2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2} \end{cases} \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x_3 = 1 \end{cases}$$



$$x^5 - x^3 - 8x^2 + 8 = 0$$

$$x^3(x^2-1) - 8.(x^2-1) = 0$$

$$(x^3-8)(x^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2.\left(\cos\frac{2\pi}{3} + isen\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + i.\sqrt{3} \\ x_3 = 2.\left(\cos\frac{4\pi}{3} + isen\frac{4\pi}{3}\right) = -1 - i.\sqrt{3} \end{cases} \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 1 \\ x_5 = -1 \end{cases} \end{cases}$$



SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES

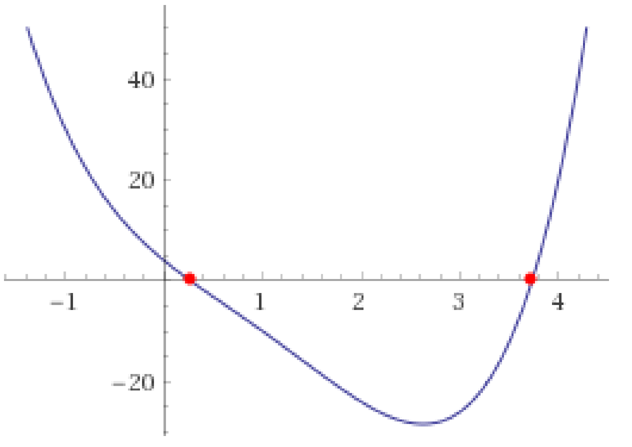
$$x^4 - x^3 + 5x^2 - 16x + 4 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x^2 - 16x + 4 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 4x^2 - 16x + 4 = 0$$

$$x^2.(x^2 - 4x + 1) + 4.(x^2 - 4x + 1) = 0$$

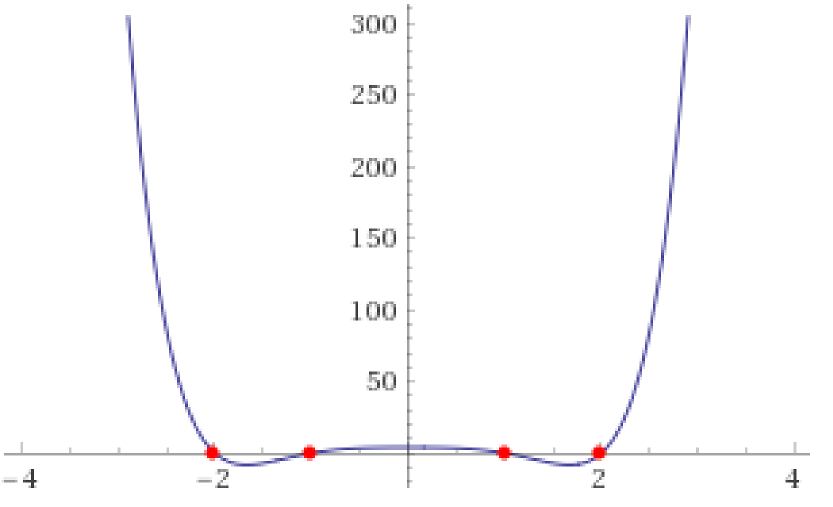
$$(x^2 + 4)(x^2 - 4x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2i \\ x_2 = -2i \end{cases} \\ x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2 + \sqrt{3} \\ x_4 = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$



$$x^6 - x^4 - x^2 + 4 = 0$$

$$x^4(x^2 - 4) - 1.(x^2 - 4) = 0$$

$$(x^4 - 1)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^4 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1.\left(\cos\dfrac{2\pi}{4} + isen\dfrac{2\pi}{4}\right) = i \\ x_3 = 1.\left(\cos\dfrac{4\pi}{4} + isen\dfrac{4\pi}{4}\right) = -1 \\ x_4 = 1.\left(\cos\dfrac{6\pi}{4} + isen\dfrac{6\pi}{4}\right) = -i \end{cases} \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_5 = 2 \\ x_6 = -2 \end{cases} \end{cases}$$



Funções Polinomiais de 1° grau

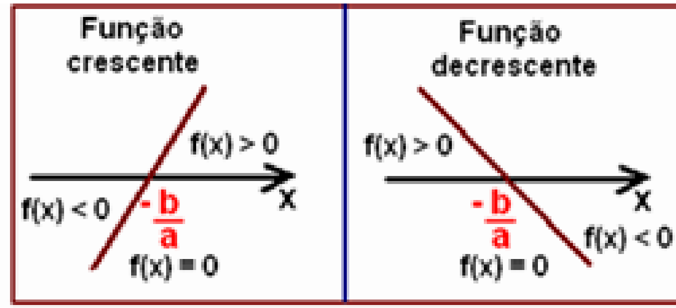
- **Zero da função**: é o valor de **x** para qual a função se anula: **f(x) = 0 → x =** $-\dfrac{b}{a}$;

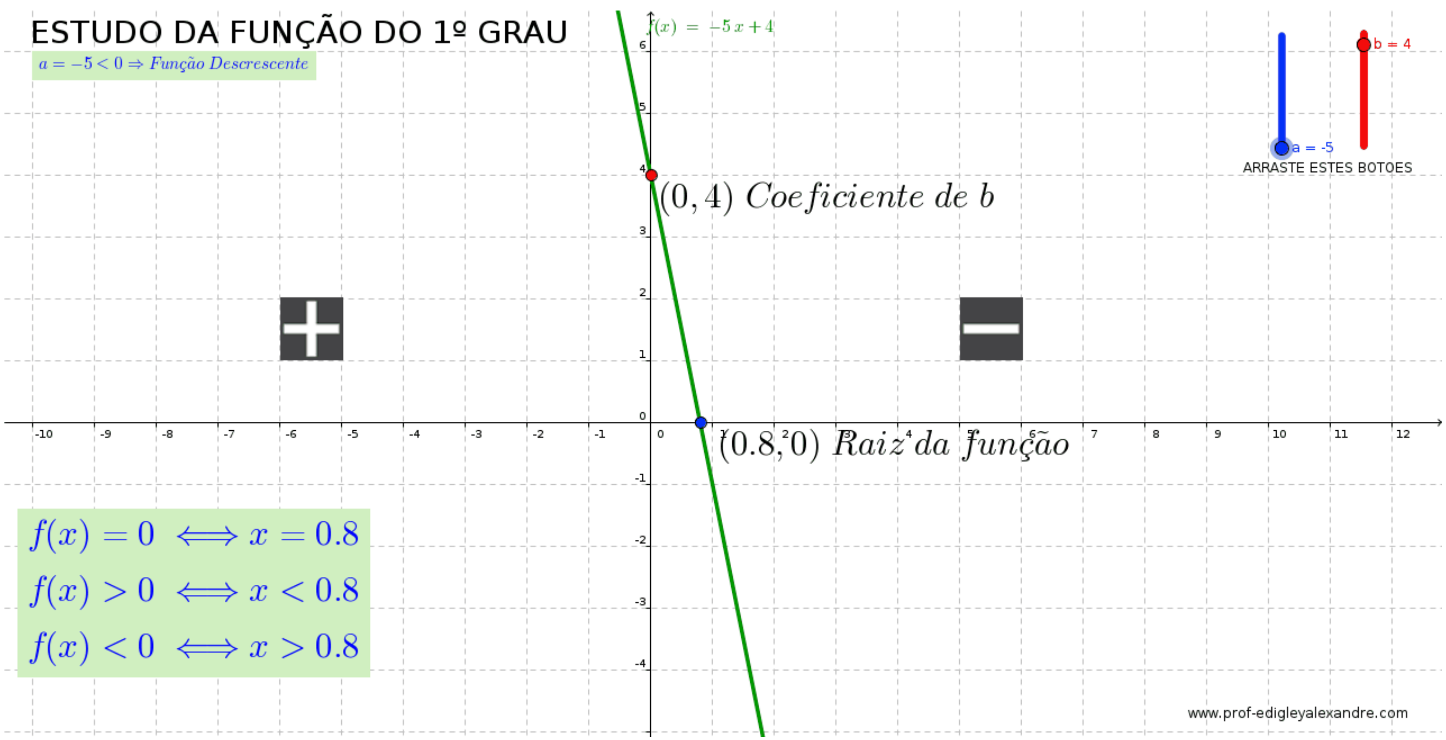
- Estudo do sinal:

f(x) < 0 → imagem negativa

f(x) = 0 → imagem nula

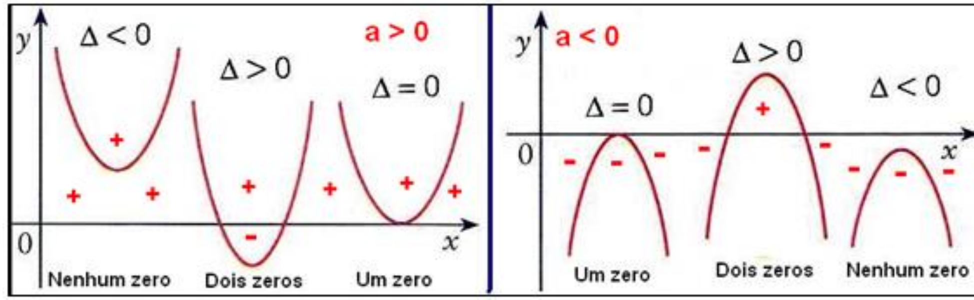
f(x) > 0 → imagem positiva



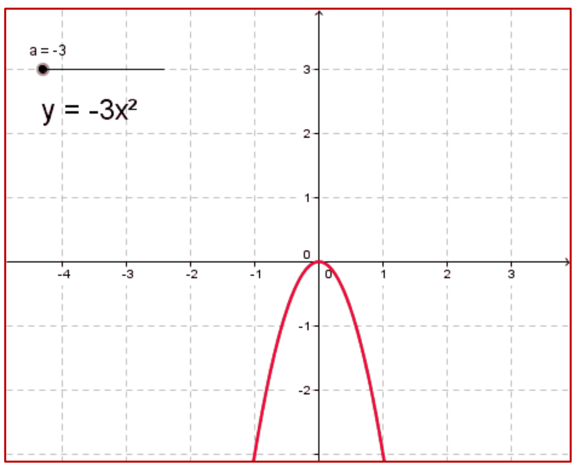


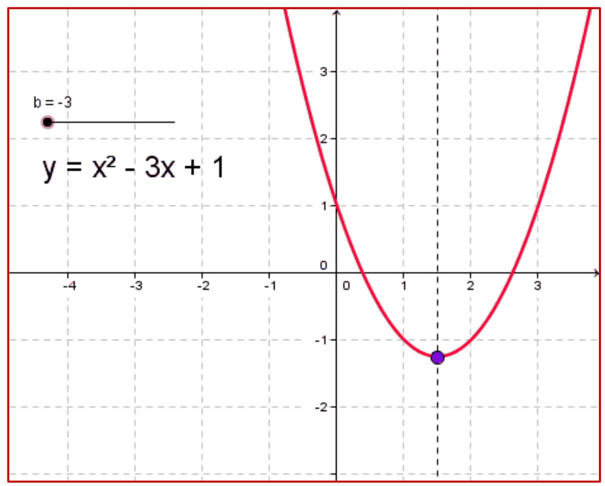
Funções Polinomiais de 2° grau

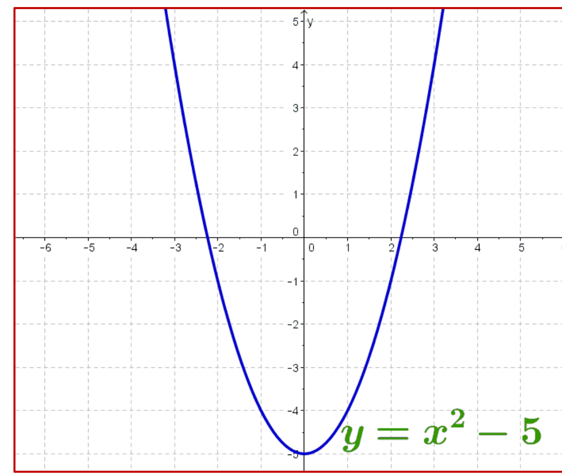
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$



Vértice da Parábola: $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$







Variação do coeficiente a

Variação do coeficiente b

Variação do coeficiente c

Animação - Geogebra

1ª Questão

(PISM) Sabendo que x_1, x_2 e x_3 são raízes do polinômio $p(x) = 5x^3 + x^2 - 14x + 8$, o valor de $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ é igual a:

a) $\frac{141}{25}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{25}$ d) $\frac{8}{5}$ e) $\frac{196}{25}$

Solução 1. Utilizando as equações de Girard, temos:

$$i)\ (x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2.(x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3)$$

$$ii)\ R.Girard : \begin{cases} Soma = -\frac{1}{5} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{1}{5} \\ Soma\ (prod.2\ a\ 2) = \frac{(-14)}{5} \Rightarrow x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 = -\frac{14}{5} \end{cases}$$

$$iii)\ \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\left(-\frac{14}{5}\right) \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{25} + \frac{28}{5} = \frac{1+140}{25} = \frac{141}{25}$$

Solução 2. A soma dos coeficientes do polinômio é zero. Logo, $x_1 = 1$ é uma de suas raízes. Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

1	5	1	– 14	8
	5	6	– 8	0

O quociente é $q(x) = 5x^2 + 6x - 8$. Resolvendo essa equação biquadrada, temos:

$$i)\ 5x^2 + 6x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4.(5).(-8)}}{10} = \frac{-6 \pm \sqrt{196}}{10} = \frac{-6 \pm 14}{10} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{-6-14}{10} = -2 \\ x_3 = \frac{-6+14}{10} = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$ii)\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (1)^2 + (-2)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 + 4 + \frac{16}{25} = 5 + \frac{16}{25} = \frac{125+16}{25} = \frac{141}{25}$$

2ª Questão.

(PISM) Considere a equação polinomial $x^3 - 9x^2 + 26x + h = 0$, onde **h** ϵ IR. Sabendo que as raízes dessa equação são números naturais consecutivos.

a) Determine as raízes da equação.

Solução. Considerando as raízes como n, n + 1 e n + 2, de acordo com as relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} S = n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 \\ S = -\dfrac{(-9)}{1} = 9 \end{cases} \Rightarrow 3n + 3 = 9 \Rightarrow 3n = 6 \Rightarrow n = 2 \rightarrow raízes: 2, 3\ e\ 4.$$

b) Calcule o valor do termo independente **h** na equação.

Solução. O termo h é o produto negativo das raízes. Logo, h = 1 – (2).(3).(4) = – 24.

3ª Questão.

(FUVEST) O polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$, em que **a** e **b** são números reais, tem restos 2 e 4 quando divididos por $(x-2)$ e $(x-1)$, respectivamente. Assim, o valor de **a** é:

a) – 6 b) – 7 c) – 8 d) – 9 e) – 10

Solução. Aplicando o teorema do resto, temos:

$$\begin{cases} p(2) = 2 \\ p(1) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2)^3 + a.(2)^2 + b.(2) = 2 \\ (1)^3 + a.(1)^2 + b.(1) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 4a + 2b = -6 \\ a + b = 3 \rightarrow \times(-2) \end{cases} \Rightarrow 2a = -12 \Rightarrow a = -6 \\ b = 1 - (-4) = 5 \end{cases}$$

4ª Questão.

(UERJ) As equações $x^3 + x + 10 = 0$ e $x^3 - 19x - 30 = 0$, em que **x** ϵ **C**, têm uma raiz comum. Determine todas as raízes não comuns.

Solução. Encontrando as raízes, temos: $\boxed{Comum: x^3 + x + 10 = x^3 - 19x - 30 \Rightarrow 20x = -40 \Rightarrow x = -2}$.

Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini em ambas as equações, descobrimos as não comuns:

– 2	**1**	**0**	**1**	**10**
	1	**– 2**	**5**	**0**

$$\boxed{x^2 - 2x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4.(1).(5)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} \rightarrow S = \{1 - 2i, 1 + 2i\}}.$$

– 2	**1**	**0**	**– 19**	**– 30**
	1	**– 2**	**– 15**	**0**

$$\boxed{x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x - 5).(x + 3) = 0 \rightarrow S = \{-3, 5\}}.$$

5ª Questão.

(UERJ) As dimensões de um paralelepípedo retângulo são dadas pelas raízes do polinômio a seguir:

$3x^2 - 13x^2 - 7x - 1$

Calcule a razão entre a sua área total e o seu volume.

Solução. Sejam r, s e t as raízes do polinômio. Utilizando a Relações de Girard e comparando com as fórmulas da área total e volume, temos:

$$P(x) = 0 \Rightarrow 3x^3 - 13x^2 + 7x - 1 = 0 \Rightarrow x^3 - \frac{13}{3}x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{1}{3} = 0$$

$$\begin{cases} i) \begin{cases} Soma(raízes)\ 2\ a\ 2 = rs + rt + st = \dfrac{7}{3} \Rightarrow Área(total) = 2.\left(\dfrac{7}{3}\right) = \dfrac{14}{3} \\ Área(total) = 2.(rs + rt + st) \end{cases} \\ ii) \begin{cases} Produto(raízes) = r.s.t = -\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3} \Rightarrow Volume = \dfrac{1}{3} \\ Volume = r.s.t \end{cases} \end{cases} \Rightarrow Razão: \frac{Área(total)}{Volume} = \frac{\frac{14}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{14}{3}.\frac{3}{1} = 14$$

6ª Questão.

(ENEM) O proprietário de uma casa de espetáculos observou que, colocando o valor da entrada a R$10,00, sempre contava com 1.000 pessoas a cada apresentação, faturando R$10.000,00 com a venda dos ingressos. Entretanto, percebeu também que, a partir de R$10,00, a cada R$2,00 que ele aumentava no valor da entrada, recebia para os espetáculos 40 pessoas a menos. Nessas condições, considerando P o número de pessoas presentes em um determinado dia e F o faturamento com a venda dos ingressos, a expressão que relaciona o faturamento em função do número de pessoas é dada por:

a) $F = \frac{-P^2}{20} + 60P$ b) $F = \frac{P^2}{20} - 60P$ c) $F = -P^2 + 1200P$ d) $F = \frac{-P^2}{20} + 60$ e) $F = -P^2 + -1220P$

Solução. Organizando as informações para a generalização, temos:

Preço Unitário: Pr (R$)	Número de Pessoas (P)	Faturamento: F (R$)
10	1 000	F = (10).(1000) = 10 000
10 + 1.(2)	1 000 – 1.(40)	F = (10 + 2).(1000 – 40) = 11 520
...	....	....
10 + x.(2)	1 000 – x.(40)	F = (10 + 2x).(1000 – 40x)

Em determinado dia, (1 000 – 4x) = P. Encontrando a relação entre F e P, temos:

$$i)\ 1000 - 40x = P \Rightarrow x = \frac{1000 - P}{40}$$

$$ii)\ F = (10 + 2x).P \Rightarrow F = 10.P + 2P.\left[\frac{1000 - P}{40}\right] = \frac{400.P + 2000P - 2P^2}{40} = -\frac{2P^2}{40} + \frac{2400.P}{40} \Rightarrow F = -\frac{P^2}{20} + 60P$$

7ª Questão.

(UERJ) Observe a função **f**, definida por $f(x) = x^2 - 2kx + 29$, para **x** є IR. Se $f(x) \geq 4$, para todo número real **x**, o valor mínimo da função **f** é 4. Assim, o valor positivo do parâmetro **k** é:

a) 5 b) 6 c) 10 d) 15

Solução. Estudando a desigualdade, temos:

$$f(x) \geq 4 \Rightarrow x^2 - 2kx + 29 \geq 4 \Rightarrow x^2 - 2kx + 25 \geq 0$$

$$y_V = 4 \Rightarrow -\frac{(-2k)^2 - 4.(1).(29)}{4.(1)} = 4 \Rightarrow 4k^2 - 116 = -16 \Rightarrow 4k^2 = 100 \Rightarrow k^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} k = 5 \rightarrow positivo \\ k = -5 \end{cases}$$

8ª Questão.

(ENEM) Um professor, depois de corrigir as provas de suas turmas, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial **f**, de grau menor que 3, para alterar as notas **x** da prova para notas y = f(x) da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero. - A nota 10 permanece 10. - A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função y = f(x) a ser utilizada pelo professor é:

a) $y=-\frac{1}{25}x^2+\frac{7}{5}x$ b) $y=-\frac{1}{10}x^2+2x$ c) $y=\frac{1}{24}x^2+\frac{7}{12}x$ d) $y=\frac{4}{5}x+2$ e) $y=x$

Solução. Como a função polinomial possui grau menor que 3, a situação pode ser modulada pela função quadrática. Observando as condições, temos:

$$i)\ f(x)=ax^2+bx+c\rightarrow\begin{cases}f(0)=0\Rightarrow a(0)^2+b(0)+c=0\Rightarrow c=0\\ f(10)=10\Rightarrow a(10)^2+b(10)=10\Rightarrow 100a+10b=10\Rightarrow 10a+b=1\\ f(5)=6\Rightarrow a(5)^2+b(5)=6\Rightarrow 25a+5b=6\end{cases}$$

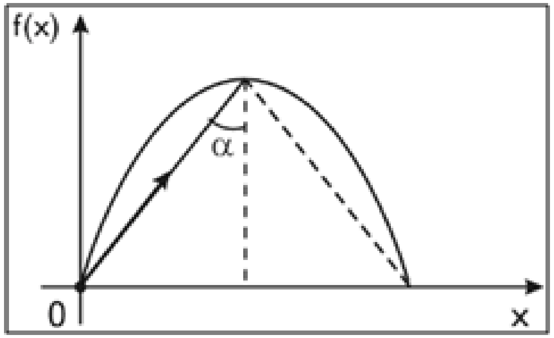
$$ii)\begin{cases}10a+b=1\rightarrow\times(-5)\\ 25a+5b=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-50a-5b=-5\\ 25a+5b=6\end{cases}\Rightarrow -25a=1\Rightarrow a=-\frac{1}{25}$$

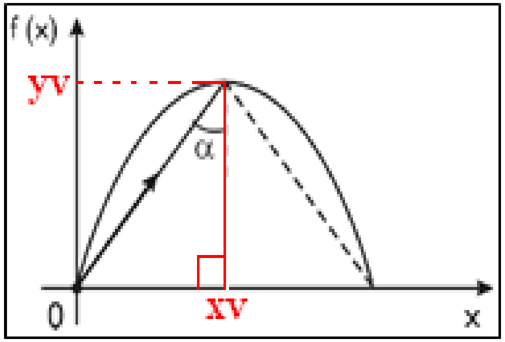
$$iii)\ b=1-10\left(-\frac{1}{25}\right)=1+\frac{10}{25}=\frac{35}{25}=\frac{7}{5}$$

$$iv)\ f(x)=-\frac{1}{25}x^2+\frac{7}{5}x$$

9ª Questão.

(UERJ) A figura a seguir mostra um anteparo parabólico é representado pela função $f(x)=\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)x^2+2\sqrt{3}\,x$.





Uma bolinha de aço é lançada da origem e segue uma trajetória retilínea. Ao incidir no vértice do anteparo é refletida e a nova trajetória é simétrica à inicial, em relação ao eixo da parábola. O valor do ângulo de incidência α corresponde a:

a) 30° b) 45° c) 60° d) 75°

Solução. Encontrando as coordenadas do vértice, temos:

$$x_v=-\frac{2\sqrt{3}}{2\left(-\sqrt{3}/3\right)}=\left(-\sqrt{3}\right)\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right)=3;\qquad y_v=-\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2-4\left(-\sqrt{3}/3\right).(0)}{4\left(-\sqrt{3}/3\right)}=\frac{12}{-4\sqrt{3}/3}=(-12).\frac{3}{-4\sqrt{3}}=\frac{9}{\sqrt{3}}=\frac{9}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}.$$

A tangente do ângulo α é a razão entre xv e yv: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\alpha=30^{o}$.

10ª Questão.

(PISM) Sejam $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_3 \neq 0$, $a_3, a_2, a_1, a_0 \in IR$ e – 3 raiz de p(x). Sabendo que o quociente da divisão de p(x) por d(x) = x + 3 é o polinômio $q(x) = 2x^2 – 3x + 1$, considere as seguintes afirmações.

I) O polinômio p(x) tem 3 raízes inteiras.

II) A soma dos coeficientes de p(x) é zero.

III) O resto da divisão de p(x) pelo binômio m(x) = (x + 2) é um número primo.

É correto afirmar que:

a) apenas I é verdadeira

b) apenas II é verdadeira

c) apenas III é verdadeira

d) I e II são verdadeiras

e) II e III são verdadeiras

Solução. Se – 3 é raiz então $p(x) = (x + 3).(2x^2 – 3x + 1)$. Para encontrar as outras raízes basta resolver a equação do segundo parêntese. Temos:

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4.(2).(1)}}{2.(2)} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{3+1}{4} = 1 \in Z \\ x_3 = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2} \notin Z \end{cases}$$

. Logo, I é falsa.

II) Verdadeira. Se a soma dos coeficientes do polinômio for zero, 1 é raiz. Testando, temos:

$$p(x) = (x+3).(2x^2 - 3x + 1) \Rightarrow p(1) = (1+3).\left[2(1)^2 - 3.(1) + 1\right] = (4).(0) = 0$$

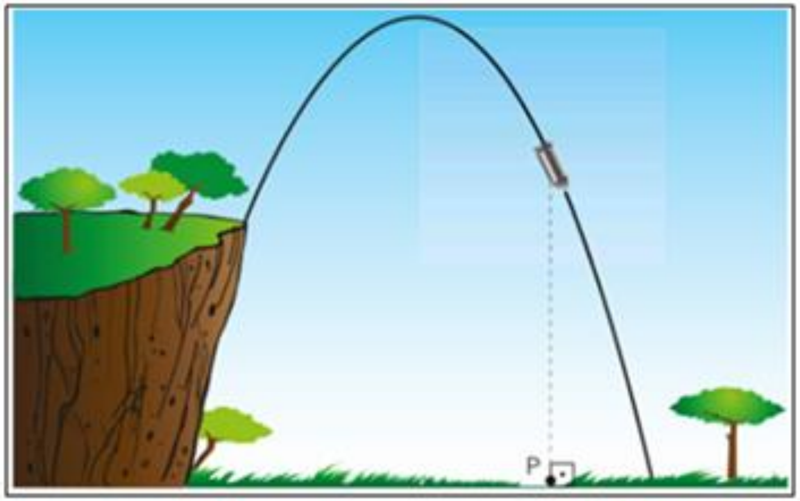
III) Falsa. O resto da divisão de p(x) por (x + 2) é, pelo teorema do resto, p(– 2). Temos:

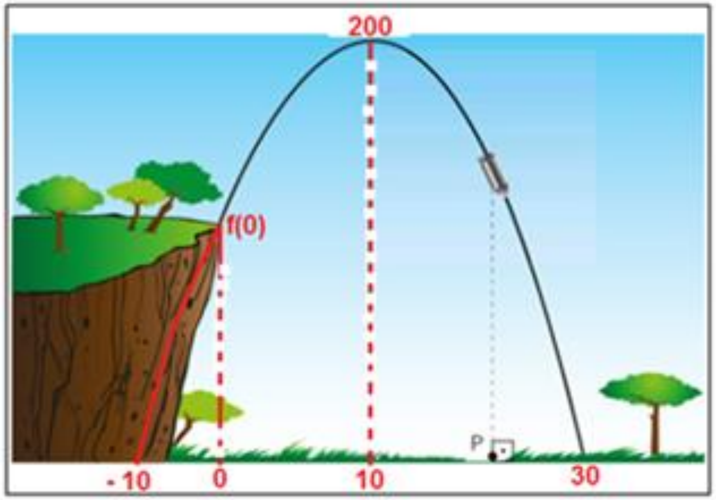
$$p(-2) = (-2+3).\left[2(-2)^2 - 3.(-2) + 1\right] = (1).(15) = 15$$

. E 15 não é um número primo.

11ª Questão.

(FUVEST) A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura.





O ponto P sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo projétil, percorre 30 m desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de 200 m acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por P, a partir do instante do lançamento, é de 10 m. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado?

a) 60 b) 90 c) 120 d) 150 e) 180

Solução. Representando a situação na forma de função quadrática, temos:

a) No momento do lançamento a abscissa é x = 0.

b) Por simetria, x = 30 é um dos zeros e x = – 10 é o outro zero.

c) f(10) = 200.

d) A altura pedida é o valor de f(0). Temos:

$$i)\begin{cases} f(x)=a.(x+10).(x-30) \\ f(10)=200 \end{cases} \Rightarrow 200=a.(10+10).(10-30) \Rightarrow a=-\frac{200}{400}=-\frac{1}{2}.$$

$$ii)\ f(0)=-\frac{1}{2}.(0+10).(0-30)=-\frac{1}{2}.(10).(-30)=\frac{300}{2}=150$$

12ª Questão.

(ENEM) O número de pessoas que morrem nas ruas e estradas brasileiras nunca foi tão alto. As últimas mudanças na legislação mostraram-se incapazes de frear o aumento dos acidentes. O número de mortes em 2004 foi de 35 100 pessoas e 38 300 em 2008. Admita que o número de mortes, no período de 2004 a 2008 tenha apresentado um crescimento anual constante. A expressão algébrica que fornece o número de mortes N, no ano **x** (com 2004 ≤ x ≤ 2008) é dada por:

a) N= 800x + 35.100 b) N= 800 (x – 2004) + 35100 c) N= 800 (x – 2004)

d) N= 3200 (x – 2004) + 35100 e) N= 3200x + 35100

Solução. Como o crescimento foi constante, o par ordenado (x,N) está sobre a reta que representa a função afim determinada entre os anos de 2004 e 2008. Observando a figura e estabelecendo a semelhança entre os triângulos, temos:

$$\frac{38\,300-35\,100}{2008-2004}=\frac{N-35\,100}{x-2004}\Rightarrow\frac{3\,200}{4}=\frac{N-35\,100}{x-2004}\Rightarrow 800=\frac{N-35\,100}{x-2004}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow N-35\,100=800.(x-2004)\Rightarrow N=800.(x-2004)+35\,100$$