|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **PROF. WALTER TADEU**  **Matemática I** | http://brasil.indymedia.org/images/2008/09/427871.jpg |  |

**Aula 4 – Progressões Geométricas – 13 / 3 / 2020 - Gabarito**

**Parte 1**.

1. Determinar a PG de três termos, sabendo que o produto dos três termos é 8 e a soma do segundo com o terceiro é 18.

**Solução. Uma PG com três termos pode ser representada como . Temos:**

**.**

**A PG é:**

2. Determinar o 10° termo da PG (64, 32, 16, ...).

**Solução. Utilizando a fórmula, temos: .**

3. Encontre o valor da razão da PG (an) em que e .

**Solução. Considerando q a razão da PG e utilizando a definição, temos:**

**25.**

4. Três números reais não nulos **a**, **b** e **c** estão, nessa ordem, em progressão geométrica de razão 3 tal que b = a.c. Calcule a soma a + b + c.

**Solução. Os números podem ser expressos por (a, b, c) = . Temos:**

**i) ;**

**ii) .**

5. Encontre o valor de x de modo que a sequência (3, x + 2, 3x) seja uma PG crescente.

**Solução. Utilizando a propriedade, temos:**

**i)**

**. Se x = 1, a PG seria (3, 3, 3). Incompatível, pois ela deve ser crescente. Logo, x = 4.**

**OBS: A progressão geométrica é (3, 6, 12) de razão q = 2.**

**Parte 2**.

1. O terceiro e o sétimo termos de uma progressão geométrica valem, respectivamente, 10 e 18. O quinto termo dessa progressão é

a) 14 b) c) **d)** e) 30

**Solução 1. Utilizando a definição, temos: = .**

**Da mesma forma, .**

**Solução 2. Como a5 está equidistante de a3 e a7. Logo, .**

2. Desde 1992, certo instituto de pesquisa vem monitorando, no início de cada ano, o crescimento populacional de uma pequena cidade do interior do estado. Os itens a seguir mostram o resultado dos três primeiros anos, em milhares de habitantes.

I. Ano de 1992, População (em milhares) = 25,6. II. Ano de 1993, População em milhares) = 38,4.

III. Ano de 1994, População em milhares) = 57,6.

Mantendo-se esta mesma progressão de crescimento, o número de habitantes dessa cidade, no início do ano 2000, em milhares, será, aproximadamente, de:

a) 204 b) 384 c) 576 **d)** 656 e) 728

**Solução. Os valores estão em PG de razão q . Considerando 1992 como o ano 1, o ano de 2000 representa o ano 9. Logo, 656,1.**

3. Se o quarto termo de uma geométrica é 2, então o produto dos seus 7 primeiros termos é igual a:

a) 108 **b)** 128 c) 148 d) 168 e) 188

**Solução. O quarto termo é o termo central da PG de sete termos. Utilizando a propriedade, vem:**

**[(4).(4).(4)].(2) = 128.**

4. O número de assinantes de um jornal de grande circulação no estado aumentou, nos quatro primeiros meses do ano, em PG, segundo os dados de uma pesquisa constantes na tabela a seguir.



Em relação ao mês de fevereiro, o número de assinantes desse jornal no mês de abril teve um aumento de:

a) 1 600 b) 1 510 **c)** 1 155 d) 1 150 e) 1 050

**Solução. Se a1 = 5 000 e a3 = 6 050, temos que: 6 050 = 5 000.q2 => .**

**Calculando os valores de fevereiro e abril, vem: .**

**OBS: A razão da PG foi de 1,1. Essa razão pode ser escrita como (1 + 0,1) = (1 + 10%). Desta forma a variação percentual de um mês para outro, no caso crescimento percentual, foi de 10%. De fevereiro a abril houve uma multiplicação por (1,1)2 = 1,21 que pode ser expressa por (1 + 0,21) = (1 + 21%). Então o crescimento percentual ou variação percentual de fevereiro a abril foi de 21%.**

**Generalizando, se um valor a aumenta para um valor b, houve variação percentual de i = .**

**Desenvolvendo, temos: . No caso q = (1 + i) é razão da PG e i a variação percentual. Se houver aumento, q > 1. Caso haja desconto q = 1 – i < 1. Exemplificando, se um número é dobrado, significa que foi multiplicado por 2 = (1 + 1) = (1 + 100%). Logo, aumentou percentualmente de 100%. Um número multiplicado por 0,8 = (1 – 0,2) = (1 – 20%) ficou reduzido em 20%.**

5. O número que deve ser subtraído de 1, de e de para que os resultados formem uma PG, nesta ordem é:

a) 2 b) **c)** d) e)

**Solução. Considerando x, o valor pedido, temos: . Utilizando a propriedade, temos:**

**– 176x + 64x + 124x = 124 – 121 => x =** .

# 6. Considere uma progressão geométrica de 5 termos e razão positiva, onde a soma do primeiro com o terceiro termo é e o produto de seus termos é 1 024. O produto dos três termos iniciais dessa progressão é igual a:

a) b) 1 **c)** d) e)

# Solução. Organizando as informações e utilizando definição e propriedades, temos:

# i) a3 é termo central da PG de 5 termos. Logo, .

# ii) 9q2 – 8q2 = 8 => q2 = 8 => q = .

# iii) .

# 7. Na sequência (x2, x, log x), de razão q, x é um número real e positivo. Então vale:

# a) 1 b) – 1 c) – 2 d) 2 e)

**Solução. Encontrando a razão, temos:**

**i)**

**ii) q => log (q) = log log 10 – 1 = – 1.**

8. Certa substância duplica seu volume a cada minuto. Às 9 horas uma pequena quantidade desta substância é colocada num recipiente e uma hora depois, isto é, às 10 horas, o recipiente estava completamente cheio. Nestas condições, a substância ocupava 1/4 da capacidade total do recipiente, às:

a) 9h 15min b) 9h 30min c) 9h 45min **d)** 9h 58min e) 9h59min

# Solução. Considere Vr o volume do recipiente e Vs o volume da substância, temos:

# i)

# ii) 1 = 57 => t = 58.

# iii) Logo, será às 9h58min.

9.  Dois anos atrás certo carro valia R$ 50.000,00 e atualmente vale R$ 32.000,00. Supondo que o valor do carro decresça a uma taxa anual constante, daqui a um ano o valor do carro será igual a:

# a) R$ 25.600,00 b) R$ 24.400,00 c) R$ 23.000,00 d) R$ 18.000,00 e) R$ 16.000,00

# Solução. Houve uma desvalorização que indica uma razão da forma (1 – i). Temos:

# 32 000 = 50 000. (1 – i)2 => .

# Daqui a um ano o preço atual estará desvalorizado em 20%. Custará (0,8).(32 000) = R$25 600,00.

# 10. Se numa progressão geométrica de termos positivos, o terceiro termo é igual à metade da razão, o produto dos três primeiros termos é igual a:

a) b) 4 c) d) 8 e)

# Solução. A PG é da forma: . Temos: .

**Logo, .**

11. A população inicial de uma colônia de bactérias, que cresce 40% a cada hora, é de 8.105 bactérias.

Qual é o número aproximado de bactérias dessa colônia ao final de 16 horas?

Considere (1,4)16 = 218

# a) 1,7 x 108 b) 2,2 x 105 c) 1,8 x 106 d) 3,4 x 108 e) 4,6 x 105

# Solução. De acordo com as informações, temos:

# P0 = 8.105 => P16 = P0.(1 + i)16 = 8.105.(1,4).16 = 8.105.(218) = 1 744.105 = 1,7.103.105 = 1,7.108.

# 12. Para n ≥ 1, a expressão an = 3n + 5 é o termo geral de uma progressão aritmética.

# 

# Para n ≥ 1, considere a sequência cujo termo geral é dado por bn = 2an.

# A sequência de termo geral bn é uma progressão geométrica cuja razão é:

# a) 256 b) 16 c) 3 d) 6 e) 8

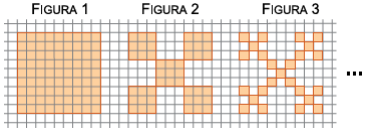
# Solução. Calculando alguns valores de bn em função de an, temos:

# i) a1 = 3.(1) + 5 = 8 => b1 = 28

# ii) a2 = 3.(2) + 5 = 11 => b2 = 211

# iii) Razão da PG (bn): 8.

# 13. A sequência de figuras, desenhadas em uma malha quadriculada, indica as três primeiras etapas de formação de um fractal. Cada quadradinho dessa malha tem área de 1 cm².



Dado que as áreas das figuras, seguindo o padrão descrito por esse fractal, formam uma progressão geométrica, a área da figura 5, em cm², será igual a:

**a)** b) c) d) e)

# Solução. A figura 1 possui (9 x 9) = 81 quadrinhos pintados, a figura 2 possui (5 x 3 x 3) = 45 quadradinhos pintados e a terceira (5 x 5 x 1) = 25 quadradinhos pintados. Essas quantidades formam uma PG de razão: q = . Logo, a5 = a1.q4 = 81. .

# 14. A sequência numérica cn é definida como cn = an.bn, com n ∈ IN, em que an e bn são progressões aritmética e geométrica respectivamente.

# Sabendo-se que a5 = b5 = 10 e que as razões an e bn são iguais a 3, o termo c8 é igual a:

# a) 100 b) 520 c) 1.350 d) 3.800 e) 5.130

**Solução. Encontrando os valores de a8­ e b8 temos:**

**c8 = (19).(270) = 5 130.**

15. A figura a seguir exibe um pentágono em que quatro lados consecutivos têm comprimentos a, b, c e d.

# Se a sequência (a, b, c, d) é uma progressão geométrica de razão q > 1, então tan θ é igual a:

# a) b) q c) q2 d) e) 2q

# Solução. Como (a, b, c, d) estão em PG, temos que:

# Se q é a razão, PG = (a, a.q, a.q2, a.q3).

# Observando as figuras e os catetos que indicados, temos:

16. O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8 000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria.

Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t, para t ≥ 1?

a) P(t) = 0,5.t -1 + 8 000 b) P(t) = 50.t -1+ 8 000 c) P(t) = 4 000.t -1 + 8 000

d) P(t) = 8 000.(0,5)t -1 **e)** P(t) = 8 000.(1,5) t - 1

# Solução. O crescimento anula de 50%, indica uma progressão geométrica de razão (1 + 0,5) = 1,5.

# Utilizando a definição, temos: at = a1.qt – 1 => P(t) = 8 000.(1,5)t – 1.

# 17. Em uma população totalmente suscetível a uma doença infecciosa, o número de novas infecções C(n) no instante de tempo n, cresce em progressão geométrica de razão q > 0. Isto é, C(n) = C0.qn, onde n é expresso em uma certa unidade de medida e C0 é a quantidade de infectados no instante inicial n = 0. A seguir, é apresentada uma tabela com exemplos.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Doença | q | Unidade de medida |
| Sarampo | 15 | 4 dias |
| Difteria | 6 | 4 dias |
| SARS | 5 | 10 dias |
| Influenza(cepa pandêmica de 1918) | 3 | 7 dias |
| Ebola (surto de 2014) | 2 | 2 semanas |

# (Adaptado de https://en.wikipedia.org/wik/Basic\_reproduction\_number, Acesso em: 25 maio 2017.)

Suponha que uma cidade totalmente suscetível, na Europa medieval, tenha sido tomada pela Peste Negra, que se iniciou com C0 = 15 infectados.

Considerando que, em 8 dias, a soma de infectados desde o início da infestação totalizou 195 pessoas e que a unidade de medida seja de 4 dias, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a razão q.

a) 2    **b)** 3    c) 5    d) 6    e) 10

# 

# Solução. Como a unidade de medida é 4 dias, consideramos 4 dias = 1 u.m e 8 dias = 2 u.m.

# Desta forma em 8 dias foram feitas duas medidas. Ou seja, para n = 1 e n = 2.

# .

# Como q > 0, q = 3.

# 18. Atualmente a massa de uma mulher é 100 kg. Ela deseja diminuir a cada mês 3% da massa que possuía no mês anterior. Suponha que ela cumpra sua meta. A sua massa em quilograma, daqui a dois meses será:

# 

# a) 91,00 b) 94,00 c) 94,09 d) 94,33 e) 96,91

# Solução. Como a massa diminui em 3%, então a progressão indica uma razão q = (1 – 0,03) = 0,97.

# Utilizando a definição, temos: a3 = 100.(0,97)2 = 100.(0,9409) = 94,09 kg.

# 19. Um prisma retangular reto possui três arestas que formam uma progressão geométrica de razão 2.  Sua área total é de 28 cm2.  Calcule o valor da diagonal do referido prisma.

# a)  cm b)  cm c)  cm d) cm e)  cm

# Solução. Considerando a, b, c as arestas, e q = 2 a razão, temos PG = .

# i) A(total): 2. = 28 => =>

# => 7b2 = 28 => b2 = 4 = b = 2.

# ii) Calculando as arestas em PG, temos: (1, 2, 4).

# ii) A diagonal vale: D = = cm.

20. Pesquisas indicam que o número de bactérias X é duplicado a cada quarto de hora. Um aluno resolveu fazer uma observação para verificar a veracidade dessa afirmação. Ele usou uma população inicial de 105 bactérias X e encerrou a observação ao final de uma hora.

Suponha que a observação do aluno tenha confirmado que o número de bactérias X se duplica a cada quarto de hora.

Após uma hora do início do período de observação desse aluno, o número de bactérias X foi de

a) 2-2.105 b) 2(-1).105 c) 22.105 d) 22.105 **e)** 24.105

**Solução. São feitas no total cinco observações, iniciando pelo X0. Após uma hora terá decorrido quatro períodos de observações:**

**Parte 3**.

1. (UNICAMP 2018) Considere a sequência de números reais (𝑎1, 𝑎2, 𝑎3, 𝑎4, 𝑎5) tal que (𝑎1, 𝑎2, 𝑎3) é uma progressão geométrica e (𝑎3, 𝑎4, 𝑎5) é uma progressão aritmética, ambas com a mesma razão 𝑤.

# a) Determine a sequência no caso em que 𝑎3 = 3 e 𝑤 = 2.

# Solução. Utilizando as definições, temos: .

# b) Determine todas as sequências tais que 𝑎1 = 1 e 𝑎5 = 8.

# Solução. Utilizando as definições, temos:

# =>

# => . Há duas sequências possíveis.

2. (ITA 2015) Sabe-se que 1, B, C, D e E são cinco números reais que satisfazem às propriedades:

I. B, C, D, E são dois a dois distintos;

II. os números 1, B, C, e os números 1, C, E, estão, nesta ordem, em progressão aritmética;

III. os números B, C, D, E, estão, nesta ordem, em progressão geométrica.

Determine B, C, D, E.

**Solução. Utilizando as definições, temos:**

**i) 1, B, C e 1, C, E estão em PA: e .**

**ii) B, C, D, E estão em PG: =>**

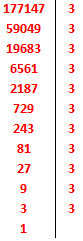
**=> .**

**A soma dos coeficientes é nula. Logo, C = 1 é uma das raízes. Pelo dispositivo de Briot-Ruffini, temos: (C – 1). (2C2 – C – 1). Encontrando as outras raízes, temos:**

**.**

**O valor C = 1 => B = 1. Não satisfaz, pois os termos são diferentes.**

**Logo, => .**

3. Numa plantação tomada por uma praga de gafanhotos, foi constatada a existência de 885.735 gafanhotos. Para dizimar esta praga, foi utilizado um produto químico em uma técnica, cujo resultado foi de 5 gafanhotos infectados, que morreram logo no 1º dia. Ao morrerem, já haviam infectado outros gafanhotos. Dessa forma, no 1º dia, morreram 5 gafanhotos; no 2º dia, morreram mais 10; no 3º dia, mais 30 e assim sucessivamente. Verificando o número de mortes acumulado, determine em quantos dias a praga de gafanhotos foi dizimada.

**Solução. Observando as mortes acumuladas ao fim dos dias, temos:**

**1ª dia: 5;**

**2º dia: (5 + 10) = 15;**

**3º dia: (15 + 30) = 45;**

**.....**

**Esses valores formam uma PG de razão q = 3: (5, 5.31, 5.32, ...., 5.3n - 1). Temos:**

**5.3n – 1 = 885 735 => 3n – 1 = 177 147 => 3n – 1 = 311 => n – 1 = 11 => n = 12.**

4. (UFG 2013) Dois experimentos independentes foram realizados para estudar a propagação de um tipo de fungo que ataca as folhas das plantas de feijão. A distribuição das plantas na área plantada é uniforme, com a mesma densidade em ambos os experimentos.

No experimento **A**, inicialmente, 6% das plantas estavam atacadas pelo fungo e, quatro semanas depois, o número de plantas atacadas aumentou para 24%. Já no experimento **B**, a observação iniciou-se com 11% das plantas atacadas pelo fungo e, seis semanas depois, o número de plantas atacadas já era 85% do total.

Considerando-se que a área ocupada pelo fungo cresce exponencialmente, a fração da plantação atingida pelo fungo aumenta, semanalmente, em progressão geométrica, e a razão desta progressão é uma medida da rapidez de propagação do fungo.

Neste caso, determine em qual dos dois experimentos a propagação do fungo ocorre mais rapidamente.

**Solução. Analisando os experimentos, temos: .**

**as razões são maiores que 1, pois em ambos os casos houve crescimento, a velocidade de propagação de A é maior que a velocidade de propagação de B.**

## 5. (UNICAMP 2010) Dois *sites* de relacionamento desejam aumentar o número de integrantes usando estratégias agressivas de propaganda.

O *site* A, que tem 150 participantes atualmente, espera conseguir 100 novos integrantes em um período de uma semana e dobrar o número de novos participantes a cada semana subsequente. Assim, entrarão 100 internautas novos na primeira semana, 200 na segunda, 400 na terceira, e assim por diante.

Por sua vez, o *site* B, que já tem 2 200 membros, acredita que conseguirá mais 100 associados na primeira semana e que, a cada semana subsequente, aumentará o número de internautas novos em 100 pessoas. Ou seja, 100 novos membros entrarão no *site* B na primeira semana, 200 entrarão na segunda, 300 na terceira, etc.

a) Quantos membros novos o *site* A espera atrair daqui a 6 semanas? Quantos associados o *site* A espera ter daqui a 6 semanas?

**Solução. Os associados aumentam em PG de razão 2.**

**i) a6 = 100.25 = 3 200 é o número de associados na 6ª semana.**

**ii) S6 = 150 + 150 + 100.(63) = 150 + 6 300 = 6 450 será o total de associados.**

b) Em quantas semanas o *site* B espera chegar à marca dos 10 000 membros?

**Solução. Os associados aumentam em PA de razão 100.**

**i) an = 100 + (n – 1).100 = 100n.**

**ii) S = 10 000 => 2 200+ 10 000 => 50n2 + 50n – 7 800 = 0 => n2 + n – 156 = 0 =>**

**=> (n + 13).(n – 12) = 0 => n = 12, pois n é positivo.**

**Logo, atinge a marca de 10 000 membros em 12 semanas.**