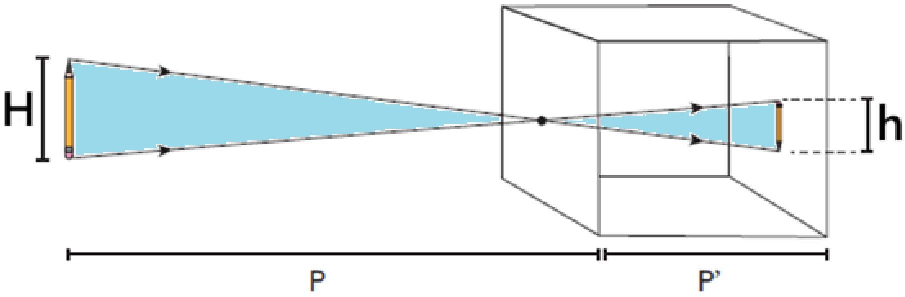
PROFESSORES: MARCOS JOSÉ / WALTER TADEU

<u>1º Exame de Qualificação - 2027</u>

MATEMÁTICA - GABARITO

Questão 3. (Interdisciplinar) O desenvolvimento da fotografia deve-se, entre outros, ao dispositivo óptico conhecido como câmara escura, composto por uma caixa fechada com paredes opacas e um pequeno orifício em uma das faces. Os raios de luz que partem de um objeto posicionado em frente à câmara passam por esse orifício e projetam, na face oposta, a imagem precisamente invertida do objeto.
Considere que um objeto de altura H esteja a uma distância P do orifício de uma câmara escura e que a distância entre as faces da câmara seja igual a P’, como mostra o esquema:



Nessas condições, a altura h da imagem projetada corresponde a:

(A) $h = \frac{P.P'}{H}$ **(B)** $h = \frac{H.P'}{P}$ (C) $h = \frac{H.P}{P'}$ (D) $h = \frac{P'}{H.P}$

Solução. Os triângulos assinalados são semelhantes. Dessa forma, temos: $\frac{h}{H} = \frac{P'}{P} \Rightarrow h = \frac{H.P'}{P}$.

Questão 7. (Interdisciplinar) Em 1998, Lélia Deluiz Wanick Salgado e Sebastião Salgado decidiram restaurar a floresta de uma antiga fazenda de gado da família, em Minas Gerais. Para isso, criaram o Instituto Terra e a área, antes intensamente degradada, é hoje um exemplo de renascimento ambiental, conforme ilustram as fotos a seguir.

SEBASTIÃO SALGADO

Adaptado de institutoterra.org.

Considere a plantação de aproximadamente 2,7 milhões de mudas nativas em 600 hectares da fazenda.

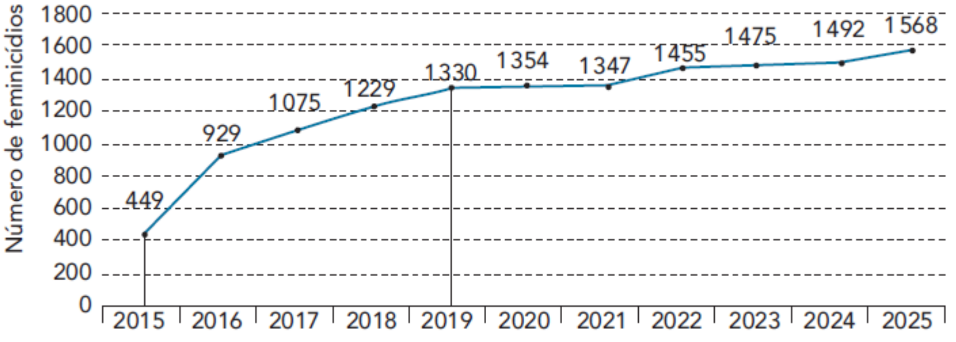
A razão entre o número de mudas plantadas e a área da fazenda, em milhares de mudas por hectare, é igual a:

(A) 1,5 (B) 3,0 **(C)** 4,5 (D) 6,0

Solução. O número 2,7 milhões corresponde a 2 700 000 = 2 700 milhares de mudas.

Estabelecendo a razão temos: $\frac{2\,700}{600} = \frac{27}{6} = 4{,}5$.

Questão 28. De acordo com o Fórum Brasileiro de Segurança Pública, desde a tipificação do crime de feminicídio, pela Lei nº 13104, de 9 de março de 2015, ao menos 13 703 mulheres já foram assassinadas por sua condição de ser mulher. Observe no gráfico o número de vítimas de feminicídio no Brasil, registrado no período entre 2015 e 2025:



Fonte: *Retrato dos feminicídios no Brasil 2006-2026*. Fórum Brasileiro de Segurança Pública, 2026.

O valor da taxa de variação média do número de feminicídios no intervalo [2015; 2019] é mais próximo de:

(A) 220 (B) 240 (C) 260 (D) 280

Solução. Calculando a média das variações entre dois anos consecutivos, temos:

$$M = \frac{(929-449)+(1075-929)+(1229-1\,075)+(1330-1\,229)}{4} = \frac{1330-449}{4} = 220{,}25.$$

Questão 29. Algumas aplicações financeiras possuem uma garantia limitada ao valor máximo de R$ 250.000,00, que é pago pelo Fundo Garantidor de Crédito (FGC), mantido pelo sistema bancário. Se um banco não tiver a capacidade de pagar aos seus clientes, em função, por exemplo, de um processo de falência, o FGC garante a cada cliente o ressarcimento de até esse valor.

Considere um banco que oferecia uma aplicação com a taxa de 18% ao ano no regime de juros compostos. Um de seus clientes aplicou R$ 200.000,00 e, após dois anos, deveria receber R$ 278.000,00. Exatamente dois anos depois, porém, o banco sofreu intervenção do Banco Central, e o cliente recebeu apenas o valor de R$ 250.000,00, definido pelo FGC, e não o dinheiro investido acrescido do percentual esperado.

Nesse caso, ao receber apenas R$ 250.000,00, considerando a aplicação inicial, esse cliente obteve a taxa de x% ao ano, calculada no regime de juros compostos, por dois anos.

Utilizando $\sqrt{5}$ = 2,24, o valor de x foi igual a:

(A) 14% (B) 13% (C) 12% (D) 11%

(A) 14 (B) 13 **(C)** 12 (D) 11

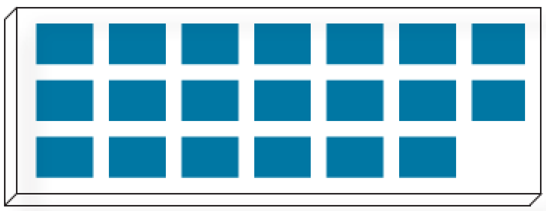
Solução. Utilizando a fórmula de juros compostos, temos:

$M = C.(1 + i)^t$ => 250 000 = 200 000.$(1 + x)^2$ => 25 = 20.$(1 + x)^2$ => (1 + x) = $\sqrt{\frac{5}{4}}$ => (1 + x) = $\frac{2{,}24}{2}$ =>

=> 1 + x = 1,12 => x = 1,12 – 1 = 0,12 que corresponde a 12%.

OBS: Como a pergunta é sobre o valor de x, as opções deveriam conter somente números, sem o símbolo da porcentagem, Isto é, taxa = 12% e x = 12. As opções deveriam ser da linha 2, com resposta certa letra (c).

Questão 30. Em um jogo, uma pessoa embaralha 20 cartas, numeradas de 1 a 20, e as coloca com os números voltados para baixo sobre um tabuleiro, conforme ilustrado a seguir.



Em seguida, essa pessoa escolhe uma soma S e vira duas cartas. Se a soma dos números dessas cartas for igual a S, esse par de cartas é retirado do tabuleiro; caso não, as cartas são recolocadas em sua posição inicial. Esse procedimento é repetido até que todos os pares com soma S sejam retirados do tabuleiro.

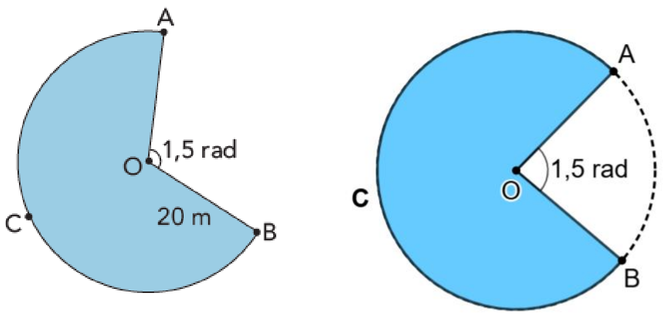
O maior valor de S para que apenas quatro cartas sobrem no tabuleiro é igual a:

(A) 17　　(B) 19　　(C) 23　　**(D)** 25

Solução. Como são 20 cartas, serão 10 somas possíveis. Para que sobrem quatro cartas, serão retiradas 16 cartas ou 8 somas máximas de mesmo valor. Deixando as 4 cartas de menor valor na mesa (1, 2, 3 e 4), temos as somas:

(5 + 20) = (6 + 19) = (7 + 18) = (8 + 17) = (9 + 16) = (10 + 15) = (11 + 14) = (12 + 13) = 25.

Questão 31. A planta de uma piscina que será construída em um parque público tem a forma de um setor circular definido pelo arco $\widehat{ACB}$, com raio $\overline{OA} = \overline{OB} = 20\,m$. O menor ângulo desse arco, AÔB, mede 1,5 radianos. Observe a figura:



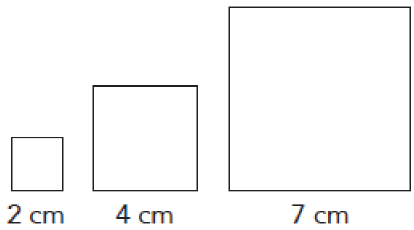
Utilizando π = 3,14, o perímetro, em metros, dessa piscina é igual a:

(A) 115,6　　**(B)** 135,6　　(C) 155,6　　(D) 175,6

Solução. O perímetro da circunferência completa é igual a (2).(π).(r) = (2).(3,14).(20) = 125,6 m.
O comprimento do arco pontilhado é (1,5).(20) = 30 m.

Logo o comprimento do arco $\widehat{ACB}$ é (125,6 – 30) = 95,6 m.
O perímetro da piscina será a soma deste comprimento com os dois raios: 95,6 + 20 + 20 = 135,6 m.

Questão 32. Para formar três quadrados de lados iguais a 2 cm, 4 cm e 7 cm, podem ser utilizados exatamente 52 cm de arame. Desse modo, a soma S de suas áreas será igual a 69 cm^2.



Se as medidas dos lados escolhidos para formar os quadrados forem x, x e y, em centímetros, utilizando-se exatamente 52 cm de arame, a soma S de suas áreas, em cm^2, será igual a $S = 2x^2 + y^2$.

Neste caso, o menor valor possível de S ocorre se x for igual a:

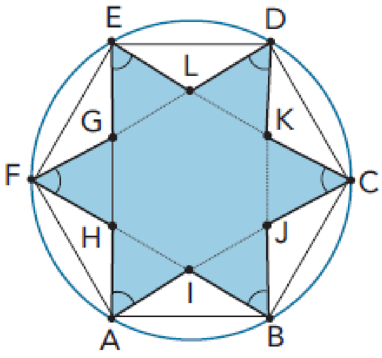
(A) $\frac{13}{3}$　　(B) $\frac{13}{2}$　　(C) $\frac{11}{3}$　　(D) $\frac{11}{2}$

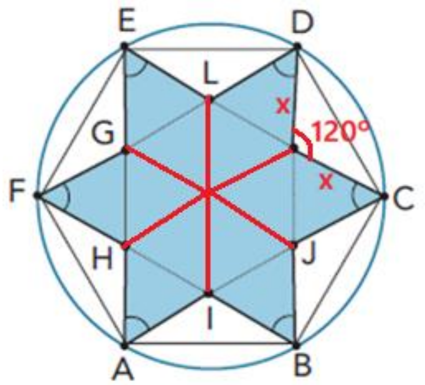
Solução. Como as medidas são x, x e y, temos: 4x + 4x + 4y = 52 => 2x + y = 13. Logo, y = 13 – 2x.

Substituindo em S, temos: $S = 2x^2 + (13 - 2x)^2$ => $S = 2x^2 + 169 - 52x + 4x^2$ => $S = 6x^2 - 52x + 169$.

O valor mínimo de S, corresponderá ao mínimo de x. Logo, x(min) = $-\frac{(-52)}{2(6)} = \frac{52}{12} = \frac{13}{3}$.

Questão 33. A partir do hexágono regular ABCDEF, foi construído o dodecágono côncavo equilátero AIBJCKDLEGFH, formado pela união dos triângulos equiláteros ACE e BDF, com ângulos internos $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \hat{E} = \hat{F} = 60°$.





Se a área do hexágono mede $24\sqrt{3}$ cm², a área do polígono côncavo, em cm², é igual a:

(A) $10\sqrt{3}$ (B) $12\sqrt{3}$ (C) $15\sqrt{3}$ **(D)** $16\sqrt{3}$

Solução. Considere que as arestas do hexágono ABCDEF medem L. Dessa forma, temos:

A(hexágono) = $\frac{6.L^2.\sqrt{3}}{4}$ => $\frac{6.L^2.\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$ => L² = 16 cm². Logo, L = $\sqrt{16} = 4\ cm$.

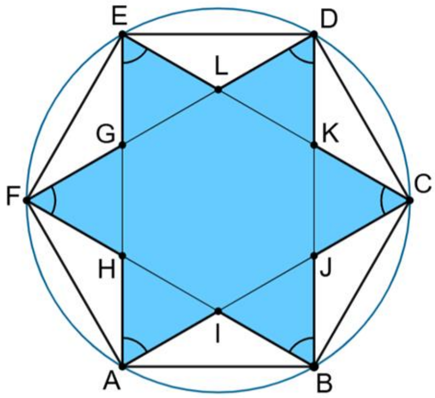
Aplicando a lei dos cossenos no triângulo indicado, de lados iguais a x, vem:

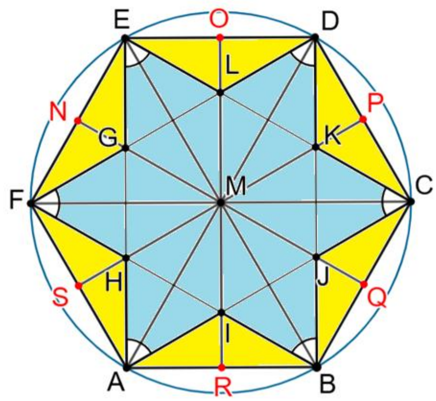
$L^2 = x^2 + x^2 - 2,(x)(x).(\cos 120^0)$ => $16 = 2x^2 - 2x^2.(-1/2)$ => $16 = 3x^2$ => $x^2 = 16/3$.

Repare que o polígono é formado por 12 triângulos equiláteros de aresta x. Logo, temos:

A(polígono) = $12.\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 3.\left(\frac{16}{3}\right)\sqrt{3} = 16.\sqrt{3}$ cm².

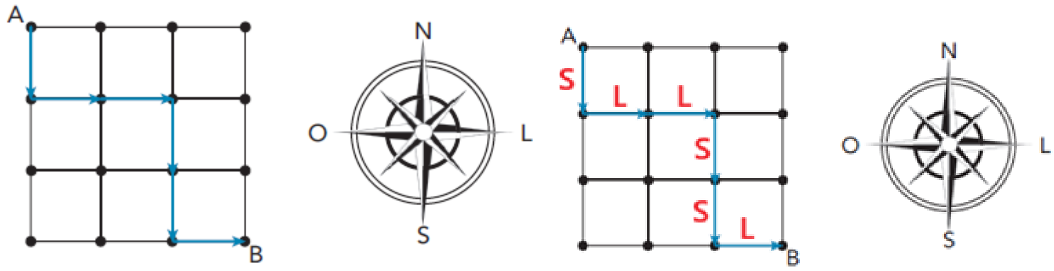
Solução 2. Identificando os pontos médios das arestas do hexágono ABCDE, temos os pontos N, O, P, Q, R, S. Esses pontos determinam mais 12 triângulos equiláteros.





O dodecaedro côncavo pode ser dividido em 24 triângulos equiláteros equivalentes aos anteriores citados. Logo o hexágono ABCDE é dividido em 36 triângulos equiláteros de mesma área. Estabelecendo a proporção, temos: $\frac{\text{A(dodecaedro)}}{\text{A(hexágono)}} = \frac{24}{36}$ => $\frac{\text{A(dodecaedro)}}{\text{A(hexágono)}} = \frac{2}{3}$ => A(dodecaedro) = $\left(\frac{2}{3}\right).24\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ cm².

Questão 34. Considere um quadrado com vários quadrados desenhados em seu interior. Sabe-se que uma partícula pode se deslocar sobre os lados desses quadrados em apenas dois sentidos: sul (S) ou leste (L). No esquema a seguir, está destacada uma possível trajetória dessa partícula de A até B.



O número total de trajetórias distintas que essa partícula pode fazer para se deslocar de A até B é igual a:

(A) 16 (B) 18 **(C)** 20 (D) 22

Solução. Quaisquer que sejam os caminhos, a sequência será uma das permutações (com repetição) das direções: S L L S S L. Logo, há N = $\frac{6!}{3!.3!} = \frac{720}{6\times6} = \frac{720}{36} = $ **20 caminhos.**