ANÁLISE COMBINATÓRIA

PROFESSOR MARCOS JOSÉ

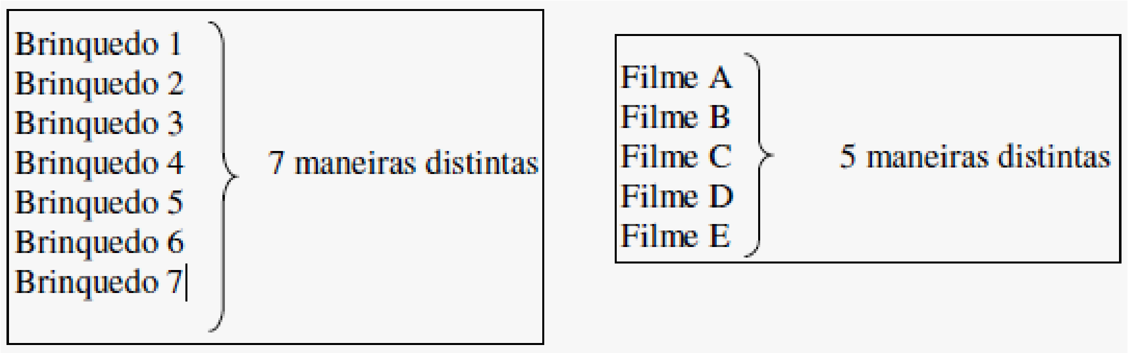
A Análise Combinatória é um ramo da Matemática que estuda, fundamentalmente, a formação de agrupamentos de elementos, numa abordagem quantitativa, a partir de um determinado conjunto, sendo esses elementos submetidos a condições previamente estabelecidas. O importante, numa primeira análise do problema, é detectar as etapas que devem ser atendidas, a fim de que o mesmo possa ser resolvido.

Quando somar e quando multiplicar em combinatória?

I - Quando somamos resultados combinatórios lançamos mão do chamado princípio aditivo.

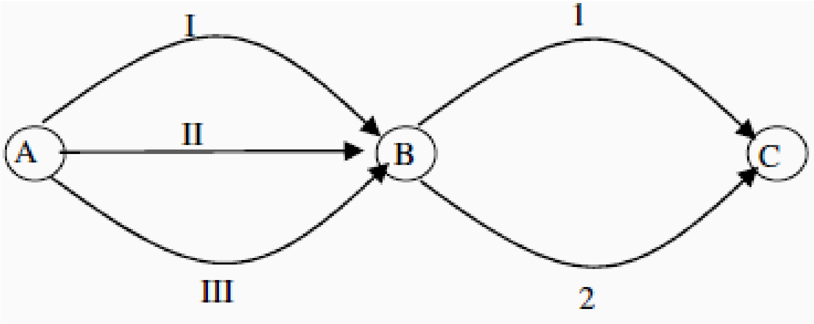
Veja esse exemplo: Adriana tem dinheiro apenas para ir ao parque de diversões e brincar em apenas um dos 7 brinquedos disponíveis ou ir ao cinema e assistir apenas um filme dos 5 disponíveis. Dessa forma de quantas maneiras diferentes Adriana pode se divertir?

Se Adriana tem dinheiro apenas para uma diversão ela tem de optar **ou** por brincar em um dos brinquedos do parque **ou** assistir a um filme do cinema. Assim ela tem 7 opções para ir ao parque e 5 opções para ir ao cinema. **Dessa forma ela tem 7 + 5 = 12 maneiras de se divertir**.



<u>II - Quando multiplicamos em análise combinatória estamos lançando mão do princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem.</u>

<u>Observe o exemplo</u>: Um motorista deseja viajar de uma A para a cidade C, mas para ir à cidade C deve-se passar necessariamente pela cidade B, veja a figura.



Como observado na figura, o motorista pode escolher entre três estradas para se deslocar de **A** para **B** e depois deve escolher uma entre as duas estradas para se deslocar de **B** para **C**. Essa situação difere e muito da do exemplo anterior. Aqui para que o motorista vá da cidade **A** para a cidade **C** tem de passar necessariamente pela cidade **B**. Isto é, tem de realizar duas ações para deslocar-se de **A** para **C**. Primeiro deve escolher uma estrada de A para **B** e em seguida outra que liga **B** a **C**.
Esse resultado é justamente o produto do número de opções para a escolha da primeira estrada pelo número de opções de escolha para a segunda. Portanto 3×2 = 6

Princípio fundamental da contagem – PFC: **Se** determinado acontecimento ocorre em **n** etapas diferentes, e se a primeira etapa pode ocorrer de $\mathbf{k_1}$ maneiras diferentes, a segunda de $\mathbf{k_2}$ maneiras diferentes, e assim sucessivamente, **então** o número total **T** de maneiras de ocorrer o acontecimento é dado por: $\mathbf{T = k_1 . k_2 . k_3 . \ldots . k_n}$
Exemplo: A Direção de Transito decidiu que as placas dos veículos passariam a ser elaboradas usando-se 3 letras do alfabeto e 4 algarismos. Qual o número máximo de veículos que poderá ser licenciado?
Solução: Para a 1ª posição temos 26 possibilidades, e como pode haver repetição, para a 2ª posição e para a 3ª posição também teremos 26 possibilidades. Em relação aos algarismos temos 10 possibilidades para cada um dos 4 lugares e tal como anteriormente pode haver repetição. Podemos então afirmar que o número total de veículos que podem ser licenciados será igual a: **26.26.26.10.10.10.10 = 175.760.000**.

Exercícios

1) Numa cidade, os números de telefones são formados de 7 algarismos sendo os 3 primeiros correspondentes ao prefixo de uma estação telefônica.
a) Quantos telefones existem com o prefixo 258?

$\boldsymbol{H\text{á } 10\ algarismos\ dispon\text{í}veis.}$

$\boldsymbol{Com\ o\ prefixo\ (258)\ nas\ 3\ primeiras\ posi\text{çõ}es, restam\ 4\ posi\text{çõ}es.}$

$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$

10 10 10 10

$\boldsymbol{10\ x\ 10\ x\ 10\ x\ 10 = 10000\ telefones\ com\ prefixo\ 258}$

b) Em quantos números de telefones com prefixo 258 o primeiro dos quatro últimos algarismos não é zero?

$\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$
9 . 10 10 10

$$9\ x\ 10\ x\ 10\ x\ 10\ = 9000$$

2) Num país, as placas dos automóveis são constituídas de duas letras, seguidas de três algarismos. Zeros podem aparecer em qualquer posição, mas placas com três zeros são excluídas. Se for utilizado um alfabeto de 26 letras, quantas placas diferentes podem ser formadas?

$$Total\ de\ placas = 26\ x\ 26\ x\ 10\ x\ 10\ x\ 10 = 676000$$

$$Total\ de\ placas\ com\ 3\ zeros = 26\ x\ 26\ x\ 1\ x\ 1\ x\ 1 = 676$$

$$676000 - 676 = 675324$$

3) Um salão de baile tem 6 portas. De quantos modos esse salão pode estar aberto?

$\boldsymbol{6\ portas \rightarrow Elas\ podem\ estar\ abertas\ ou\ fechadas\ \rightarrow 2\ x\ 2\ x\ 2\ x\ 2\ x\ 2\ x\ 2 = 64}$

$\boldsymbol{Entre\ as\ 64\ possibilidades\ tem\ uma\ que\ \acute{e}\ todas\ as\ portas\ estarem\ fechadas.}$

$\boldsymbol{Como\ o\ sal\tilde{a}o\ tem\ que\ estar\ aberto \rightarrow 64 - 1 = 63\ modos}$

4) De quantos modos podemos pintar 7 casas enfileiradas, dispondo de 4 cores, sendo que cada casa é pintada de uma só cor e duas casas vizinhas não são pintadas com a mesma cor?

4 possib.	3 possib.	3 possib.	3 possib.	3 possib.	3 possib.	3 possib.

$\boldsymbol{4\ x\ 3\ x\ 3\ x\ 3\ x\ 3\ x\ 3\ x\ 3 = 4\ x\ 729 = 2916\ modos\ diferentes}$

5) Utilizando os algarismos 0, 1, 2, 3, 6, 9, quantos números pares de 5 algarismos distintos podem ser formados?

$1° \; caso) \; O \; número \; termina \; em \; 0.$

0

___ ___ ___ ___ ___

5 4 3 2 1

$$5 \; x \; 4 \; x \; 3 \; x \; 2 \; x \; 1 = 120$$

$2° \; caso) \; O \; número \; termina \; em \; 2 \; ou \; 6 \; e \; não \; pode \; começar \; pelo \; 0.$

Não pode 0 2 ou 6

___ ___ ___ ___ ___

4 4 3 2 2

$$4 \; x \; 4 \; x \; 3 \; x \; 2 \; x \; 2 = 192$$

$$Total = 120 + 192 = 312 \; números \; distintos$$

6) (UFF) Em um sofá de 3 lugares irão sentar-se uma criança, uma moça e um rapaz, sendo que a criança sempre irá sentar-se no lugar do meio. De quantas maneiras diferentes 5 crianças, 5 moças e 5 rapazes poderão sentar-se no sofá?

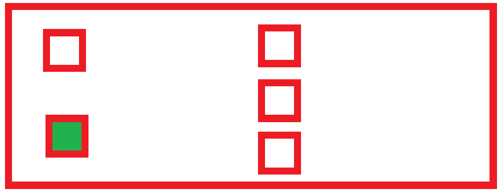
Moça	Criança	Rapaz
5 possib.	5 possib.	5 possib.
Rapaz	Criança	Moça
5 possib.	5 possib.	5 possib.

$$\mathbf{5\ x\ 5\ x\ 5 + 5\ x\ 5\ x\ 5 = 125 + 125 = 250}$$

7) (UFGO) Utilizando as notas dó, ré, mi, fá, sol, lá e si, um músico deseja compor uma melodia com 4 notas, de modo que tenha notas consecutivas distintas. Por exemplo: {dó, ré, dó, mi} e {si, ré, mi, fá} são melodias permitidas, enquanto {ré, ré, dó, mi} não, pois possui duas notas ré consecutivas. Qual o número de melodias que podem ser compostas nessas condições?

$$\mathbf{7\ x\ 6\ x\ 6\ x\ 6 = 42\ x\ 36 = 1512}$$

8) Um grupo de pessoas é formado por 5 crianças e 4 adultos, dos quais 3 possuem habilitação para dirigir automóvel. De quantos modos distintos pode-se efetuar a lotação de um carro de 5 lugares (2 na frente e 3 atrás) para uma viagem, sabendo-se que criança não pode viajar no banco da frente?



$$\boldsymbol{Verde = motorista}$$

$$\boldsymbol{Motorista = 3\ possibilidades}$$

$$\boldsymbol{Banco\ ao\ lado\ do\ motorista = 4\ - 1\ (motorista) = 3\ possibilidades}$$

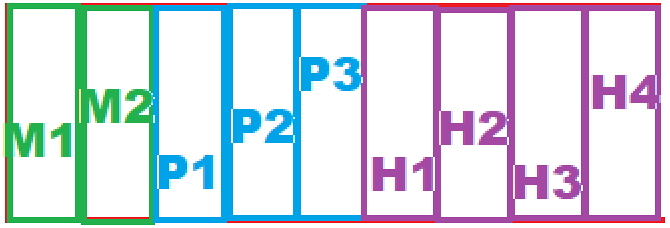
$$\boldsymbol{Banco\ de\ trás = quem\ sobrou = 7\ x\ 6\ x\ 5 = 210\ possibilidades}$$

$$\boldsymbol{Total = 3\ x\ 3\ x\ 210 = 9\ x\ 210 = 1890}$$

9) Numa sala com 4 meninos e 5 meninas, quantas duplas podemos formar com 1 menino e 1 menina?

$$4\ x\ 5 = 20\ duplas$$

10) De quantas formas podemos arrumar, numa estante, 2 livros diferentes de Matemática, 3 livros diferentes de Português e 4 livros diferentes de História, de tal forma que os livros da mesma disciplina fiquem juntos?



$$\begin{cases} Livros\ de\ Matemática = 2\ x\ 1 = 2 \\ Livros\ de\ Português = 3\ x\ 2\ x\ 1 = 6 \\ Livros\ de\ História = 4\ x\ 3\ x\ 2\ x\ 1 = 24 \end{cases}$$

$$Além\ disso, tem\ a\ ordem\ das\ disciplinas\ (M, P, H) = 3\ x\ 2\ x\ 1 = 6$$

$$Total = 2\ x\ 6\ x\ 24\ x\ 6 = 1728\ maneiras\ diferentes$$

Fatorial

Vamos considerar o conjunto dos números naturais, sem o zero, e tomar o número 5 como exemplo. Se efetuarmos o produto entre ele e seus antecessores vamos obter: 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120. Podemos representar esta multiplicação como sendo 5!, ou seja, cinco fatorial. Toda vez que colocarmos um ponto de exclamação após o número, estamos requerendo o fatorial desse número, isto é, o produto entre esse número e todos os números naturais que o antecedem, até chegar ao número 1.

Generalizando, podemos escrever o fatorial de um número n qualquer como n!, onde,
n! = n x (n-1) x (n-2) x ...x 2 x 1

$$Observação \rightarrow \begin{cases} 0! = 1 \\ 1! = 1 \end{cases}$$

Exercícios

1) Simplifique os fatoriais abaixo:

$a)\ \frac{10!}{8!}$ $\qquad \frac{10!}{8!} = \frac{10\ x\ 9\ x\ 8!}{8!} = 10\ x\ 9 = 90$

$b)\ \frac{9!}{6!\,.\,3!}$ $\qquad \frac{9\ x\ 8\ x\ 7\ x\ 6!}{6!.\,3.\,2.\,1} = \frac{9\ x\ 8\ x\ 7}{3\ x\ 2\ x\ 1} = 3\ x\ 4\ x\ 7 = 84$

$c)\ \frac{n!}{(n-2)!}$ $\qquad \frac{n\ x\ (n-1)x\ (n-2)!}{(n-2)!} = n\ x\ (n-1) = n^2 - n$

$d)\ \frac{(n-1)!}{n!}$ $\qquad \frac{(n-1)!}{n\ x\ (n-1)!} = \frac{1}{n}$

$e)\ \dfrac{19!\,.\,17!}{20!\,.\,18!}$ $$\frac{19!\ x\ 17!}{20\ x\ 19!\ x\ 18\ x\ 17!} = \frac{1}{20\ x\ 18} = \frac{1}{360}$$

$f)\ \dfrac{n!}{(n-2)!} = 30$ $$\frac{n\ x\ (n-1)x\ (n-2)!}{(n-2)!} = 30 \rightarrow n\ x\ (n-1) = 30 \rightarrow n^2 - n - 30 = 0$$

$$n = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-30)}}{2.1} \rightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{2} \rightarrow \begin{cases} n_1 = \dfrac{1+11}{2} = 6 \\ n_2 = \dfrac{1-11}{2} = -5\ (\text{não serve}) \end{cases}$$

2) Resolva a equação: $\dfrac{(n+1)!+n!}{(n+2)!}=\dfrac{1}{7}$

$$\frac{(n+1).n!+n!}{(n+2).(n+1).n!}=\frac{1}{7}\rightarrow\frac{n!.(n+1+1)}{(n+2).(n+1).n!}=\frac{1}{7}\rightarrow\frac{(n+2)}{(n+2).(n+1)}=\frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{(n+1)}=\frac{1}{7}\rightarrow n+1=7\rightarrow n=6$$

Permutações simples: é uma técnica combinatória utilizada quando desejamos contar as possibilidades formação de uma fila ou sequencia em que não há repetição de elementos e todos esses elementos são utilizados no problema.

Exemplo: Com os algarismos 1, 2 e 3, quantos números de três algarismos distintos (isto é, sem repetição) podemos formar?

Solução. Formar números, em primeira análise, nada mais é do que ordenar algarismos em fila. Desse modo, a resposta, como vimos no princípio multiplicativo é 3 x 2 x 1 = 6 números, pois, não houve repetição de algarismos.

Outro exemplo de contagem no qual lançamos mão da ferramenta permutação simples é a contagem do número de **anagramas** que podem ser formados com alguma palavra.
Anagrama é um processo de troca de ordem das letras de uma palavra com o intuito de formar uma nova palavra (esta palavra formada pode ter sentido ou não). Por exemplo, da palavra **roma** vem o anagrama **amor.**

Exemplo: A palavra **TRAPO** pode formar quantos anagramas?
Solução. Esses são apenas alguns dos anagramas que podemos formar:

PRATO	RAPTO	PARTO	PORTA	TROPA	TRPAO	POTRA

Como não podemos repetir as letras da palavra e todas as letras devem ser utilizadas uma boa técnica de contagem é o uso das permutações simples. Observe que a palavra TRAPO contém 5 letras. Dispostas da esquerda para a direita são cinco posições as quais uma letra de cada vez preenche cada posição:

5 opções	4 opções	3 opções	2 opções	1 opção
1ª	2ª	3ª	4ª	5ª

Para a escolha de uma letra para a 1ª posição temos cinco letras disponíveis. Optaremos por uma. Desse modo restarão quatro letras disponíveis para a escolha da letra da 2ª posição. Optaremos por outra letra. Para a terceira haverá três opções. Para a quarta duas. E para a quinta e última uma opção. Finalmente devemos multiplicar esses valores encontrados: **5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120 anagramas da palavra trapo.**

Generalizando, $\boldsymbol{P_n = n!}$

Exercícios

1) Em uma festa de criança o animador resolve colocar as 6 crianças, que estão participando de uma determinada brincadeira, em fila. De quantas formas diferentes é possível colocar estas 6 crianças em fila?

$$P_6 = 6! = 6 \; x \; 5 \; x \; 4 \; x \; 3 \; x \; 2 \; x \; 1 = 720$$

2) Quantos são os anagramas da palavra Marcos que começam pela letra M?

M __ __ __ __ __

$$P_5 = 5! = 5 \; x \; 4 \; x \; 3 \; x \; 2 \; x \; 1 = 120$$

3) De quantas maneiras diferentes Adriana, Bruna, Carlos e Daniel podem se posicionar em uma fila ?

$$P_4 = 4! = 4 \; x \; 3 \; x \; 2 \; x \; 1 = 24$$

4) Quantos são os anagramas da palavra PRATO que começam e terminam com consoante?

consoante $\qquad$ consoante

$\underline{\ 3\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\ 2\ }$

$$\textit{Número de anagramas} = 3 \times 2 \times P_3 = 6 \times 3 \times 2 \times 1 = 36$$

5) Cinco pessoas devem ficar em pé, uma ao lado da outra, para tirar uma fotografia, sendo que duas delas se recusam a ficar lado a lado. O número de posições distintas para as cinco pessoas serem fotografadas juntas é igual a

a) 48. b) 72. c) 96. d)120. e) 160

Vamos supor que A e B não fiquem juntos.

$$Total = P_5 = 5! = 120$$

$$120 - 48 = 72$$

Anagramas que A e B fiquem juntos.

$\underline{AB}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$

$$P_4 \times 2!\ (AB \text{ ou } BA) = 24 \times 2 = 48$$

GABARITO: B

6) Em uma apresentação na escola, oito amigos, entre eles Carlos, Timóteo e Joana, formam uma fila. Calcule o número de diferentes formas que esta fila de amigos pode ser formada de modo que Carlos, Timóteo e Joana fiquem sempre juntos.

CTJ

$$P_6 \; x \; P_3 = 720 \; x \; 6 = 2160$$

7) Qual o número de anagramas da palavra COLEGA em que as letras *L*, *E* e *G* aparecem juntas em qualquer ordem?

LEG

$$P_4 \; x \; P_3 = 24 \; x \; 6 = 144$$

8) Cinco casais resolvem ir ao teatro e compram os ingressos para ocuparem todas as 10 poltronas de uma determinada fileira. Determine o número de maneiras que essas 10 pessoas podem se acomodar nas 10 poltronas, se um dos casais brigou, e eles não podem se sentar lado a lado.

$\boldsymbol{Vamos\ supor\ que\ A\ e\ B\ não\ fiquem\ juntos.}$

$$\boldsymbol{Total = P_{10} = 10!}$$

$\boldsymbol{Anagramas\ que\ A\ e\ B\ \ fiquem\ juntos.}$

AB ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

$$\boldsymbol{P_9\ x\ 2!\,(AB\ ou\ BA) = 9!\,x\ 2}$$

$$\boldsymbol{Total = 10! - 9!\,x\ 2 = 10\ x\ 9! - 2\ x\ 9! = 9!\,x\ (10-2) = 8\ x\ 9!}$$

9) Um grupo de seis amigos, sendo dois meninos e quatro meninas, estão comemorando a formatura do Ensino Médio. O fotógrafo solicitou ao grupo que se sentasse em um banco de seis lugares e que os meninos se sentassem nas extremidades do banco. Com essa configuração, o número de maneiras distintas que o grupo pode se sentar é de:

a) 720 b) 24 c) 48 d) 120

H __ __ __ __ H

$$P_2 \ x \ P_4 = 2 \ x \ 24 = 48$$

10) Oito adultos e um bebê irão tirar uma foto de família. Os adultos se sentarão em oito cadeiras, um adulto por cadeira, que estão dispostas lado a lado e o bebê sentará no colo de um dos adultos. Determine o número de maneiras distintas de dispor essas 9 pessoas para a foto.

$$Adultos\ podem\ se\ sentar\ de\ P_8 = 8!\ maneiras.$$

$$O\ beb\hat{e}\ pode\ se\ sentar\ em\ qualquer\ colo.\ Logo, 8\ colos.$$

$$Total = 8 \ x \ 8!$$

<u>Permutações com elementos repetidos</u>: Essa nova ferramenta, como o nome indica, diferentemente das permutações simples, lida com elementos que se repetem. Isto é, busca formar filas ou sequencias com elementos repetidos. Vale a ressalva: todos os elementos em questão devem ser utilizados.

O número de permutações com n elementos em que um deles aparece repetidamente a vezes, outro b vezes, outro c vezes e assim sucessivamente é dado por: $P_n^{a,b,c,d,..} = \frac{n!}{a!.b!.c!.d!...}$.

<u>Observe o exemplo</u>. Quantos são os anagramas da palavra **CACHORRO**?

$$\boldsymbol{n = 8; 2C; 2R; 2O}$$

$$\boldsymbol{P_8^{2,2,2} = \frac{8!}{2!\,x\,2!\,x\,2!} = \frac{8\,x\,7\,x\,6\,x\,5\,x\,4\,x\,3\,x\,2!}{2!\,x\,2!\,x\,2!}}$$

Exercícios

1) Quantos são os anagramas da palavra CARACA?

$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3!\,.\,2!} = \frac{6\ x\ 5\ x\ 4\ x\ 3!}{3!\ x\ 2\ x\ 1} = \frac{120}{2} = 60$$

2) Quantos são os anagramas da palavra MALTRATAR?

$$P_9^{3,2,2} = \frac{9!}{3!\,.\,2!.\,2!} = \frac{9\ x\ 8\ x\ 7\ x\ 6\ x\ 5\ x\ 4\ x\ 3!}{3!\ x\ 2\ x\ 1\ x\ 2\ x\ 1} = 15120$$

3) Um sapo encontra-se na origem do sistema cartesiano. Em cada pulo, esse sapo se desloca o equivalente a uma unidade de medida, e ele só pula na horizontal (para a direita) e na vertical (para a cima). De quantos modos esse sapo pode chegar ao ponto (3,6)?

O sapo precisa se deslocar, necessariamente, 3 vezes para direita e 6 vezes para cima, independente da ordem.

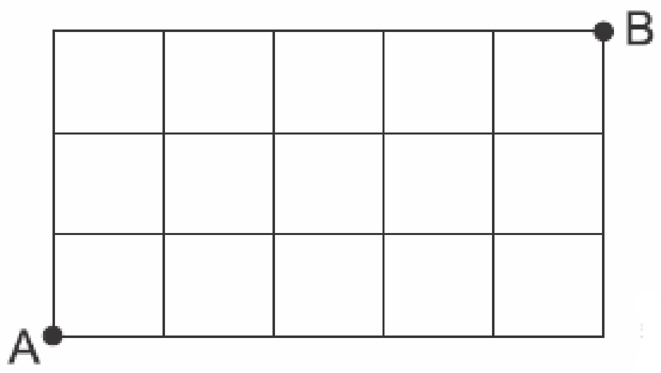
Exemplo de caminho: DDCCCDCCC (D é direita, C é para cima).

$$P_9^{3,6} = \frac{9!}{3!\, x\, 6!} = \frac{9\, x\, 8\, x\, 7\, x\, 6!}{3\, x\, 2\, x\, 1\, x\, 6!} = 3\, x\, 4\, x\, 7 = 84$$

4) Uma urna contém 10 bolas, sendo 3 bolas pretas iguais, 3 bolas brancas iguais, 2 bolas verdes iguais e 2 bolas azuis iguais. Quantas são as maneiras diferentes de se extrair, uma a uma, as 10 bolas da urna, sem reposição?

$$P_{10}^{3,3,2,2} = \frac{10!}{3!\, x\, 3!\, x\, 2!\, x\, 2!} = \frac{10\, x\, 9\, x\, 8\, x\, 7\, x\, 6\, x\, 5\, x\, 4\, x\, 3!}{3!\ \, x\, 6\, x\, 2\, x\, 2} = 25200$$

5) Na figura a seguir, as linhas horizontais e verticais representam ruas e os quadrados representam quarteirões. A quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando A a B é:



$$De\ A\ até\ B \rightarrow \begin{cases} 5\ deslocamentos\ para\ a\ Direita \\ 3\ deslocamentos\ para\ Cima \end{cases}$$

$$P_8^{5,3} = \frac{8!}{5!\ x\ 3!} = \frac{8\ x\ 7\ x\ 6\ x\ 5!}{5!\ x\ 3\ x\ 2\ x\ 1} = \frac{8\ x\ 7\ x\ 6}{6} = 56$$

6) Quantos são os anagramas da palavra **INDEPENDENTE,** começados por IND e terminados em T?

IND __ __ __ __ __ __ __ __ **T**

$$\boldsymbol{Sobraram\ as\ letras: E, P, E, N, D, E, N, E \rightarrow P_8^{4,2} = \frac{8!}{4!\,.\,2!} = \frac{8\ x\ 7\ x\ 6\ x\ 5\ x\ 4!}{4!\ x\ 2\ x\ 1} = \frac{1680}{2} = 840}$$

Combinações Simples: Combinação simples é uma ferramenta combinatória utilizada quando desejamos contar as possibilidades de formação de um subgrupo de elementos a partir de um grupo dado.. Nesse subgrupo a ordem dos elementos não importa.

Generalizando, A partir de um conjunto com **n** elementos devem-se formar um subconjunto com **p** elementos. A quantidade de subconjuntos é igual a:

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!.\,p!}$$

Arranjos simples: Arranjos simples são uma ferramenta combinatória utilizada quando desejamos contar as possibilidades de formação de um subgrupo de elementos a partir de um grupo dado.. Nesse subgrupo a ordem dos elementos importa.

Para generalizar, se desejarmos dispor **p** elementos em fila escolhidos dentre de **m** elementos, com **p** ≤ **m**, podemos realizar esse processo de

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exercícios

1) Disponho de 6 frutas e pretendo utilizar 3 para fazer uma vitamina. Quantas vitaminas diferentes posso fazer?

$$A\ ordem\ das\ frutas\ não\ importa \rightarrow C_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!\ x\ 3!} = \frac{6!}{3!.3!} = \frac{6\ x\ 5\ x\ 4\ x\ 3!}{3!\ x\ 3\ x\ 2\ x\ 1} = 20$$

OU

$\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$

6 5 4

$$\frac{6\ x\ 5\ x\ 4}{3!} = \frac{6\ x\ 5\ x\ 4}{3\ x\ 2\ x\ 1} = 20$$

2) De um grupo de 8 moradores, dois serão escolhidos para serem síndico e subsíndico. De quantas maneiras isso pode ser feito?

$$A\ ordem\ dos\ escolhidos\ importa \rightarrow A_8^2 = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = \frac{8\ x\ 7\ x\ 6!}{6!} = 56$$

3) Os alunos de uma determinada turma da escola ABC precisam eleger dois professores de sua turma, um para ser o representante da turma e o outro para ser o suplente. Eles resolvem tomar esta decisão de forma aleatória. Quantas possibilidades são possíveis para escolher estes dois professores, sabendo que esta turma possui 12 docentes?

$$\boldsymbol{A\ ordem\ dos\ escolhidos\ importa} \rightarrow \boldsymbol{A_{12}^{2} = \frac{12!}{(12-2)!} = \frac{12!}{10!} = \frac{12\ x\ 11\ x\ 10!}{10!} = 132}$$

4) O professor Euler precisa escolher 2 alunos de sua turma para pegar os livros que estão na biblioteca da escola. Sabendo que sua turma tem 15 alunos, de quantas maneiras Euler poderá fazer esta escolha?

$$\boldsymbol{A\ ordem\ dos\ alunos\ não\ importa} \rightarrow \boldsymbol{C_{15}^{2} = \frac{15!}{(15-2)!\ x\ 2!} = \frac{15!}{13!.2!} = \frac{15.14.13!}{13!.2} = 105}$$

5) Em uma determinada Instituição de ensino trabalham 10 professores de Matemática, destes 4 trabalham no Ensino Superior e o restante no Ensino Médio. De quantas maneiras podemos formar uma comissão de 3 pessoas de modo que:

a) quaisquer uns dos 10 possam ser escolhidos?

b) nenhum membro seja do Ensino Superior?

c) haja exatamente 1 professor do Ensino Superior na comissão?

d) pelo menos um seja do Ensino Superior?

$$\mathbf{10\ \textit{professores}} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{4\ \textit{no Ensino superior}} \\ \mathbf{6\ \textit{no Ensino médio}} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{a)\ C_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!.3!} = \frac{10.9.8.7!}{7!.3.2.1} = \frac{10.9.8}{3.2.1} = 10.3.4 = 120}$$

$$b)\ C_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!.\,3!} = \frac{6!}{3!.\,3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!.\,3.2.1} = 5.4 = 20$$

$$c)\ 1\ do\ Superior \rightarrow 2\ do\ Médio \rightarrow C_4^1\ x\ C_6^2 = \frac{4!}{3!.\,1!}.\frac{6!}{4!.\,2!} = \frac{4.3!}{3!}.\frac{6.5.4!}{4!.\,2} = 4.15 = 60$$

$$d)\ Pelo\ menos\ 1\ do\ Superior \rightarrow \begin{cases} 1\ do\ superior\ e\ 2\ do\ médio \\ 2\ do\ superior\ e\ 1\ do\ médio \\ 3\ do\ superior \end{cases}$$

$$1°\ caso)\ C_4^1\ x\ C_6^2 = \frac{4!}{3!.\,1!}\ x\ \frac{6!}{4!.\,2!} = \frac{4.3!}{3!}\ x\ \frac{6.5.4!}{4!.\,2} = 4\ x\ 15 = 60$$

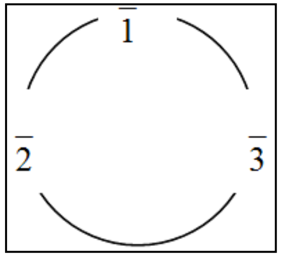
$$2° \; caso) \; C_4^2 \; x \; C_6^1 = \frac{4!}{2!.\,2!} \; x \; \frac{6!}{5!.\,1!} = \frac{4.\,3.\,2!}{2!.\,2} \; x \; \frac{6.\,5!}{5!.\,1} = 6 \; x \; 6 = 36$$

$$3° \; caso) \; C_4^3 = \frac{4!}{1!.\,3!} = \frac{4.\,3!}{3!} = 4$$

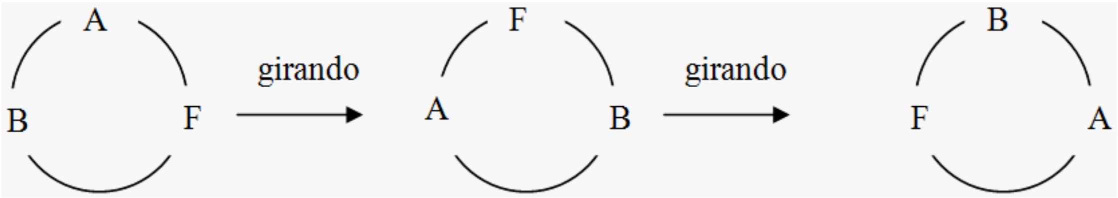
$$Total = 60 + 36 + 4 = 100$$

<u>Permutações Circulares</u>: Permutações circulares é uma ferramenta intrinsecamente ligada à permutações simples. Difere dessa pelo fato de os elementos em questão estarem dispostos em fila circular, isto é, através de um circulo.

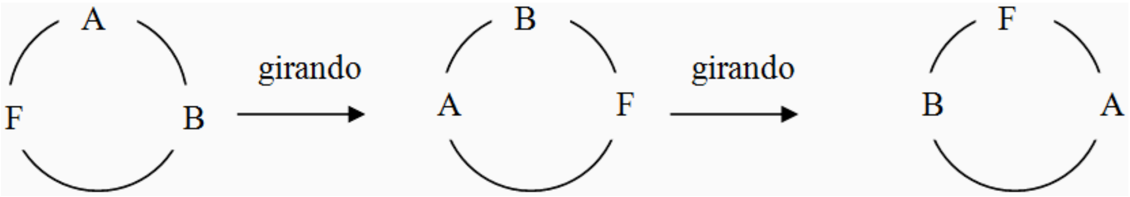
<u>Exemplo 1</u>. Tomando André, Fulana e Beltrana, temos: Três posições, três pessoas então pelo princípio da contagem teremos 3!.



Observando melhor:

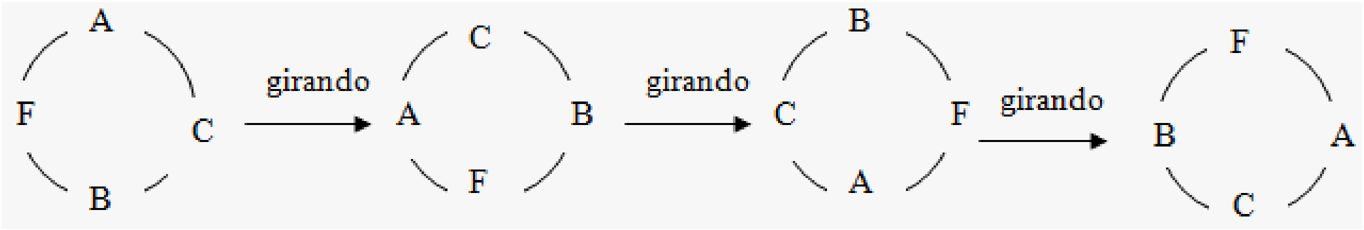


Se eu monto uma ciranda e ela gira, ela não deixa de ser a ciranda **original**!
“Formada então uma disposição inicial, qualquer outra disposição que girando eu consiga voltar à disposição inicial na verdade é a mesma roda formada pela disposição inicial!”



Note que por mais que giremos, nunca chegaremos à disposição do primeiro quadro. **Logo esta roda é diferente da primeira.** Portanto, neste caso, temos duas possibilidades das 3 pessoas ficarem em círculo.

<u>Exemplo 2</u>. Suponhamos agora André, Fulana, Beltrana e Ciclana brincando de roda.



Vimos que com 3 elementos eu tinha 3 rodas iguais, para 4 temos 4 rodas iguais, continuando desta maneira teremos para n pessoas brincando de roda uma quantidade de n rodas iguais a inicial.
Para 4 teremos que cada roda conta como 4 pelo cálculo do princípio da contagem., e continuando verificamos que para **<u>n</u>** teremos que cada roda conta como **<u>n</u>** pelo princípio da contagem.
Como fazer então para saber a quantidade total de rodas distintas possíveis?

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = \frac{n.(n-1).(n-2)\ldots.3.2.1}{n} = (n-1).(n-2)\ldots 3.2.1 = (n-1)!$$

Exercícios

1) De quantas maneiras distintas, seis pessoas podem se sentar em torno de uma mesa redonda?

$$\boldsymbol{(PC)_6 = (6-1)! = 5! = 120}$$

2) Uma família é composta por seis pessoas: o pai, a mãe e quatro filhos. Num restaurante, essa família vai ocupar uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentes essas pessoas podem se sentar em torno da mesa de modo que o pai e a mãe fiquem juntos?

$$\boldsymbol{Pai\ e\ m\tilde{a}e\ juntos \rightarrow vamos\ contar\ como\ 1\ pessoa.}$$

$$\boldsymbol{(PC)_5 = (5-1)! = 4! = 24}$$

Permutação caótica: Uma permutação caótica é uma permutação de uma lista de elementos em que nenhum dos elementos está na sua posição original. É chamado também de Número de Desarranjos.

$$D_n = n!.\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots . + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

Exercício

1) Numa mesa tem 4 cartões com as letras A, B, C e D, nessa ordem. Uma criança irá misturar essas letras e colocá-las em qualquer posição. Quantas são as possibilidades de nenhuma estar na posição original?

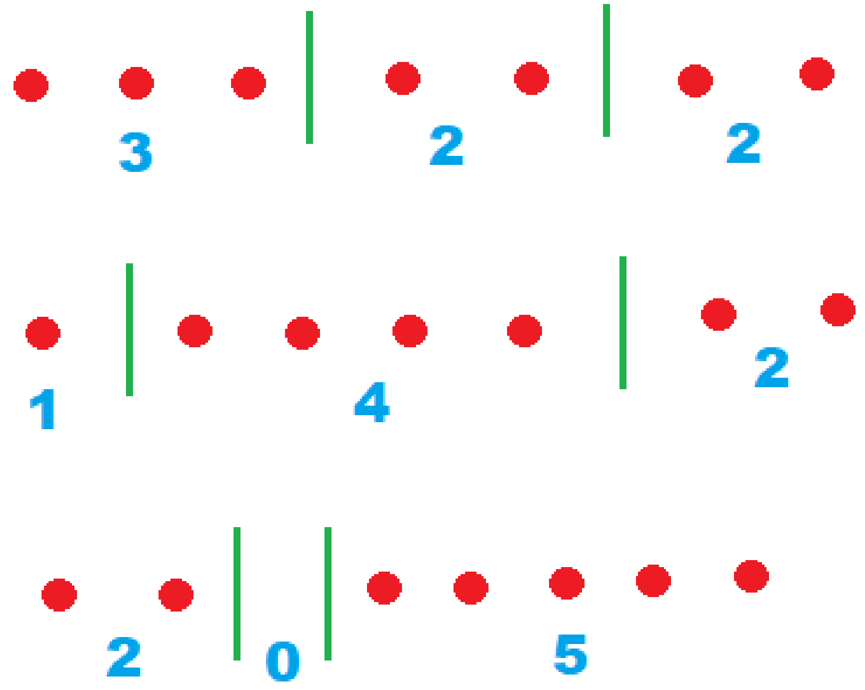
$$\boldsymbol{D_4 = 4!.\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) \to D_4 = 24.\left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) \to D_4 = 24.\left(\frac{12}{24} - \frac{4}{24} + \frac{1}{24}\right)}$$

$$\boldsymbol{D_4 = 24.\left(\frac{9}{24}\right) = 9}$$

Soluções inteiras não negativas de uma equação linear

Considere a equação linear $x + y + z = 7$.

Temos que dividir 7 *unidades em* 3 *partes ordenadas, de modo que fique em cada parte um número maior ou igual a zero.*



$$Temos\ 9\ símbolos \rightarrow \begin{cases} 7\ bolinhas \\ 2\ barras \end{cases}$$

$$P_9^{7,2} = \frac{9!}{2!\,.\,7!} = \frac{9.8.7!}{2.7!} = 36$$

Exercício

1) Um bar vende 3 tipos de refrigerantes: guaraná, soda e tônica. De quantas formas uma pessoa pode comprar 5 garrafas de refrigerantes?

$$\begin{cases} \boldsymbol{guaraná = x} \\ \boldsymbol{soda = y} \\ \boldsymbol{tônica = z} \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{x + y + z = 5} \qquad \boldsymbol{Temos\ 7\ símbolos} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{5\ bolinhas} \\ \boldsymbol{2\ barras} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{P_7^{5,2} = \frac{7!}{2!\,.\,5!} = \frac{7.6.5!}{2.5!} = 21}$$