LOGARITMOS

PROPRIEDADES E EQUAÇÕES
EXERCÍCIOS

PROFESSOR MARCOS JOSÉ

Exercícios

1) Sabendo que $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, encontre os logaritmos abaixo, em função de a e b.

$a)$ $log\, 36$

$$\mathbf{36 = 2^2.3^2 \rightarrow \mathit{log}\, 36 = \mathit{log}\, 2^2.3^2 \rightarrow \mathit{Pela\ P5} \rightarrow \mathit{log}\, 36 = \mathit{log}\, 2^2 + \mathit{log}\, 3^2}$$

$$\mathbf{\mathit{Pela\ P7} \rightarrow \mathit{log}\, 36 = 2.\mathit{log}\, 2 + 2.\mathit{log}\, 3 \rightarrow \mathit{log}\, 36 = 2.\mathit{a} + 2.\mathit{b}}$$

$b)$ $log\, 50$

$$\mathbf{50 = 2.5^2 \rightarrow \mathit{log}\, 50 = \mathit{log}\, 2.5^2 \rightarrow \mathit{Pela\ P5} \rightarrow \mathit{log}\, 50 = \mathit{log}\, 2 + \mathit{log}\, 5^2}$$

$$\mathbf{\mathit{Pela\ P7} \rightarrow \mathit{log}\, 50 = \mathit{log}\, 2 + 2.\mathit{log}\, 5 \rightarrow \mathit{log}\, 50 = \mathit{log}\, 2 + 2.(1 - \mathit{log}\, 2)}$$

$$\mathbf{\mathit{log}\, 50 = \mathit{a} + 2.(1 - \mathit{a}) \rightarrow \mathit{log}\, 50 = \mathit{a} + 2 - 2.\mathit{a} \rightarrow \mathit{log}\, 50 = 2 - \mathit{a}}$$

$c)\ \log 1{,}2$

$$\log 1,2 = \log \frac{12}{10} \rightarrow Pela\ P6 \rightarrow \log 1,2 = \log 12 - \log 10 \rightarrow \log 1,2 = \log 2^2.3 - \log 10$$

$$Pela\ P5 \rightarrow \log 1,2 = \log 2^2 + \log 3 - \log 10 \rightarrow Pela\ P7 \rightarrow \log 1,2 = 2.\log 2 + \log 3 - \log 10$$

$$Pela\ P1 \rightarrow \log 1,2 = 2.a + b - 1$$

$d)\ \log_{16} 27$

$$Pela\ P8 \rightarrow \log_{16} 27 = \frac{\log 27}{\log 16} \rightarrow \log_{16} 27 = \frac{\log 3^3}{\log 2^4} \rightarrow Pela\ P7 \rightarrow \log_{16} 27 = \frac{3.\log 3}{4.\log 2}$$

$$\log_{16} 27 = \frac{3.b}{4.a}$$

2) Resolva as equações abaixo:

$a)\ log_6(3x-1) = log_6(x+7)$

$\boldsymbol{Propriedade: log_b\,x = log_b\,y \leftrightarrow x = y, para\ quaisquer\ números\ reais\ positivos\ x, y\ e\ b,}$
$\boldsymbol{com\ b \neq 1.}$

$\boldsymbol{(3x-1) = (x+7) \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4}$

$\boldsymbol{Verificação:\ log_6(3.4-1) = log_6(4+7) \rightarrow log_6\,11 = log_6\,11}$

$\boldsymbol{S = \{4\}}$

$b)\ log_7(9x-7) = log_7(4-2x)$

$\boldsymbol{9x-7 = 4-2x \rightarrow 11x = 11 \rightarrow x = 1}$

$\boldsymbol{Verificação:\ log_7(9.1-7) = log_7(4-2.1) \rightarrow log_7\,2 = log_7\,2}$

$\boldsymbol{S = \{1\}}$

$c)\ log_3(5x-6)=2$

$$\boldsymbol{log_3(5x-6)=2 \rightarrow Definição\ de\ logaritmo \rightarrow 3^2=(5x-6) \rightarrow 9=5x-6}$$

$$\boldsymbol{5x=15 \rightarrow x=3}$$

$$\boldsymbol{Verificação:\ log_3(5.3-6)=2 \rightarrow log_3 9=2}$$

$$\boldsymbol{S=\{3\}}$$

$d)\ log_3(x+2)+log_3(x-2)=1$

$$\boldsymbol{Pela\ P5 \rightarrow log_3(x+2).(x-2)=1 \rightarrow Pela\ Def.de\ log. \rightarrow 3^1=(x+2).(x-2)}$$

$$\boldsymbol{3=x^2-2x+2x-4 \rightarrow x^2=7 \rightarrow x=\pm\sqrt{7}}$$

$$\boldsymbol{Verificação \rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{7} \rightarrow log_3\left(\sqrt{7}+2\right)+log_3\left(\sqrt{7}-2\right)=1 \rightarrow ok \\ x=-\sqrt{7} \rightarrow log_3\left(-\sqrt{7}+2\right)+log_3\left(-\sqrt{7}-2\right)=1 \rightarrow Não\ serve, pois\ \left(-\sqrt{7}-2\right)<0 \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{S=\left\{\sqrt{7}\right\}}$$

$e)\ log_2(x+1) - log_2(x-3) = 3$

$$\boldsymbol{Pela\ P6 \rightarrow log_2 \frac{x+1}{x-3} = 3 \rightarrow Pela\ Def.de\ Log. \rightarrow 2^3 = \frac{x+1}{x-3}}$$

$$\boldsymbol{8 = \frac{x+1}{x-3} \rightarrow 8x - 24 = x + 1 \rightarrow 7x = 25 \rightarrow x = \frac{25}{7}}$$

$$\boldsymbol{Verificação:\ log_2(\frac{25}{7} + 1) - log_2\left(\frac{25}{7} - 3\right) = 3 \rightarrow ok}$$

$$\boldsymbol{S = \left\{\frac{25}{7}\right\}}$$

$f)\ log_3(8x+1) - log_3(x-1) = 2$

$$\boldsymbol{Pela\ P6 \rightarrow log_3 \frac{8x+1}{x-1} = 2 \rightarrow Pela\ Def.Log. \rightarrow 3^2 = \frac{8x+1}{x-1}}$$

$$\boldsymbol{9 = \frac{8x+1}{x-1} \rightarrow 9x - 9 = 8x + 1 \rightarrow x = 10}$$

$\boldsymbol{Verificação:\ log_3(8.10+1) - log_3(10-1) = 2 \rightarrow ok}$

$\boldsymbol{S = \{10\}}$

$g)\ log_2(x+1) + log_2(x-1) = 3$

$\boldsymbol{Pela\ P5 \rightarrow log_2(x+1).(x-1) = 3 \rightarrow Pela\ Def.Log. \rightarrow 2^3 = (x+1).(x-1)}$

$\boldsymbol{8 = x^2 - x + x - 1 \rightarrow 8 = x^2 - 1 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3}$

$$\boldsymbol{Verificação:\begin{cases} x = 3 \rightarrow log_2(3+1) + log_2(3-1) = 3 \rightarrow ok \\ x = -3 \rightarrow log_2(-3+1) + log_2(-3-1) = 3 \rightarrow não\ serve, pois\ (-3+1) < 0 \end{cases}}$$

$\boldsymbol{S = \{3\}}$

$h)\ (log_3 x)^2 + 4.log_3 x - 5 = 0$

$$\textbf{Considere } log_3 x = t \rightarrow t^2 + 4.t - 5 = 0 \rightarrow t = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.(-5)}}{2.1} \rightarrow t = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2}$$

$$t = \frac{-4 \pm 6}{2} \rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{-4+6}{2} = 1 \\ t_2 = \dfrac{-4-6}{2} = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 1 \rightarrow log_3 x = 1 \rightarrow Pela\ Def.Log. \rightarrow 3^1 = x \rightarrow x = 3 \\ t = -5 \rightarrow log_3 x = -5 \rightarrow Pela\ Def.Log. \rightarrow 3^{-5} = x \rightarrow x = \dfrac{1}{243} \end{cases}$$

Verificação: Como os dois valores de x saõ positivos, ambos servem.

$$S = \left\{3, \frac{1}{243}\right\}$$