

LOGARITMOS

PROPRIEDADES E EQUAÇÕES EXERCÍCIOS – LISTA 2

PROFESSOR MARCOS JOSÉ

Exercícios

1) Resolva as equações abaixo:

a) $\log_2(4x + 5) = \log_2(2x + 11)$

$4x + 5 = 2x + 11 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3$

Verificação: $\log_2(4 \cdot 3 + 5) = \log_2(2 \cdot 3 + 11) \rightarrow \log_2 17 = \log_2 17 \rightarrow ok$

$S = \{3\}$

b) $\log_4(x + 3) = 2$

Pela Def. Log. $\rightarrow 4^2 = x + 3 \rightarrow 16 = x + 3 \rightarrow x = 13$

Verificação: $\log_4(13 + 3) = 2 \rightarrow \log_4 16 = 2 \rightarrow ok$

$S = \{13\}$

$$c) \log_3(3 - x) = \log_3(3x + 7)$$

$$3 - x = 3x + 7 \rightarrow -4 = 4x \rightarrow x = -1$$

$$\text{Verificação: } \log_3(3 - (-1)) = \log_3(3 \cdot (-1) + 7) \rightarrow \log_3 4 = \log_3 4 \rightarrow \text{ok}$$

$$S = \{-1\}$$

$$d) \log_2(x - 2) + \log_2 x = 3$$

$$\text{Pela P5} \rightarrow \log_2(x - 2) \cdot x = 3 \rightarrow \text{Pela Def. Log.} \rightarrow 2^3 = (x - 2) \cdot x$$

$$8 = x^2 - 2x \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2} \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x = \begin{cases} x_1 = \frac{2 + 6}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{2 - 6}{2} = -2 \end{cases} \rightarrow \text{Verificação: } \begin{cases} \log_2(4 - 2) + \log_2 4 = 3 \rightarrow \text{ok} \\ \log_2(-2 - 2) + \log_2 -2 = 3 \rightarrow \text{n\~{a}o serve} \end{cases}$$

$$S = \{4\}$$

$$e) 2 \cdot \log_7(x + 3) = \log_7(x^2 + 45)$$

$$\text{Pela P7} \rightarrow \log_7(x + 3)^2 = \log_7(x^2 + 45) \rightarrow (x + 3)^2 = x^2 + 45 \rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 45$$

$$6x = 36 \rightarrow x = 6$$

$$\text{Verificação: } 2 \cdot \log_7(6 + 3) = \log_7(6^2 + 45) \rightarrow \text{ok}$$

$$S = \{6\}$$

$$f) \ln(2x - 3) = \ln(4x - 5)$$

$$2x - 3 = 4x - 5 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$$

$$\text{Verificação: } \ln(2 \cdot (1) - 3) = \ln(4 \cdot (1) - 5) \rightarrow \ln -1 = \ln -1 \rightarrow \text{n\~{a}o serve}$$

$$S = \emptyset$$

$$g) \log_2(x - 3) + \log_2(x + 3) = 4$$

$$\text{Pela P5} \rightarrow \log_2(x - 3) \cdot (x + 3) = 4 \rightarrow \text{Pela Def. Log.} \rightarrow 2^4 = (x - 3) \cdot (x + 3)$$

$$16 = x^2 + 3x - 3x - 9 \rightarrow 25 = x^2 \rightarrow x = \pm 5$$

$$\text{Verificação: } \begin{cases} x = 5 \rightarrow \log_2(5 - 3) + \log_2(5 + 3) = 4 \rightarrow \text{ok} \\ x = -5 \rightarrow \log_2(-5 - 3) + \log_2(-5 + 3) = 4 \rightarrow \text{n\~{a}o serve} \end{cases}$$

$$S = \{5\}$$

$$h) (\log_2 x)^2 - \log_2 x = 2$$

$$\text{Considere: } \log_2 x = t \rightarrow t^2 - t = 2 \rightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$t = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \\ t_2 = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 x = 2 \rightarrow \text{Pela Def. Log.} \rightarrow 2^2 = x \rightarrow x = 4 \\ \log_2 x = -1 \rightarrow \text{Pela Def. Log.} \rightarrow 2^{-1} = x \rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Verificação: } \log_2 x \rightarrow \begin{cases} \log_2 4 \rightarrow \text{ok} \\ \log_2 \frac{1}{2} \rightarrow \text{ok} \end{cases}$$

$$S = \left\{4, \frac{1}{2}\right\}$$

$$i) \log(x + 2) - \log(x - 1) = 1$$

$$\text{Pela P6} \rightarrow \log\left(\frac{x + 2}{x - 1}\right) = 1 \rightarrow \text{Pela Def. Log.} \rightarrow 10^1 = \frac{x + 2}{x - 1}$$

$$10x - 10 = x + 2 \rightarrow 9x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Verificação: } \log\left(\frac{4}{3} + 2\right) - \log\left(\frac{4}{3} - 1\right) = 1 \rightarrow \text{ok}$$

$$S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$$

$$j) \log_3(x + 1) + \log_3(x - 7) = 2$$

$$\text{Pela P5} \rightarrow \log_3(x + 1) \cdot (x - 7) = 2 \rightarrow \text{Pela Def. Log.} \rightarrow 3^2 = (x + 1) \cdot (x - 7)$$

$$9 = x^2 - 7x + x - 7 \rightarrow x^2 - 6x - 16 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$$x = \begin{cases} x_1 = \frac{6 + 10}{2} = 8 \\ x_2 = \frac{6 - 10}{2} = -2 \end{cases}$$

$$\text{Verificação: } \begin{cases} x = 8 \rightarrow \log_3(8 + 1) + \log_3(8 - 7) = 2 \rightarrow \text{ok} \\ x = -2 \rightarrow \log_3(-2 + 1) + \log_3(-2 - 7) = 2 \rightarrow \text{n\~{a}o serve} \end{cases}$$

$$S = \{8\}$$

2) Encontre o valor das expressões abaixo:

$$a) E = \frac{\log 1000 + \log 0,01}{\log 10}$$

$$E = \frac{\log 10^3 + \log 10^{-2}}{\log 10} \rightarrow \text{Usando P3 e P1} \rightarrow E = \frac{3 - 2}{1} = 1$$

$$b) E = \frac{\ln e^5 + \log_e e^2 - \ln e}{\ln e^3}$$

$$\text{Usando P3 e P1} \rightarrow E = \frac{5 + 2 - 1}{3} = 2$$

$$c) E = \frac{\ln e + \ln 1}{\ln e^2}$$

$$1^{\circ}) \ln e = \log_e e \rightarrow \text{Pela P1 vem: } \ln e = 1.$$

$$2^{\circ}) \ln 1 = \log_e 1 \rightarrow \text{Pela P2 vem: } \ln 1 = 0.$$

$$3^{\circ}) \ln e^2 = \log_e e^2 \rightarrow \text{Pela P3 vem: } \ln e^2 = 2.$$

$$E = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$d) \log \sqrt[5]{10^3}$$

$$\log \sqrt[5]{10^3} = \log 10^{\frac{3}{5}} = \log_{10} 10^{\frac{3}{5}} \rightarrow \text{Pela P3 vem:}$$

$$\log \sqrt[5]{10^3} = \frac{3}{5}$$

3) Sabendo que $\log 2 = 0,30$ e $\log 7 = 0,84$, encontre o valor dos logaritmos abaixo:

a) $\log 28$

$$28 = 2^2 \cdot 7 \rightarrow \log 28 = \log 2^2 \cdot 7 \rightarrow \text{Pela P5} \rightarrow \log 28 = \log 2^2 + \log 7$$

$$\text{Pela P7} \rightarrow \log 28 = 2 \cdot \log 2 + \log 7 \rightarrow \log 28 = 2 \cdot 0,30 + 0,84 \rightarrow \log 28 = 1,44$$

b) $\log 70$

$$70 = 7 \cdot 10 \rightarrow \log 70 = \log 7 \cdot 10 \rightarrow \text{Pela P5} \rightarrow \log 70 = \log 7 + \log 10$$

$$\log 70 = 0,84 + 1 \rightarrow \log 70 = 1,84$$

c) $\log 0,07$

$$\log 0,07 = \log \frac{7}{100} \rightarrow \text{Pela P6} \rightarrow \log 0,07 = \log 7 - \log 100 \rightarrow \log 0,07 = \log 7 - \log 10^2$$

$$\text{Pela P3} \rightarrow \log 0,07 = 0,84 - 2 \rightarrow \log 0,07 = -1,16$$

d) $\log_8 49$

$$\text{Pela P8} \rightarrow \log_8 49 = \frac{\log 49}{\log 8} \rightarrow \log_8 49 = \frac{\log 7^2}{\log 2^3} \rightarrow \text{Pela P7} \rightarrow \log_8 49 = \frac{2 \cdot \log 7}{3 \cdot \log 2}$$

$$\log_8 49 = \frac{2 \cdot 0,84}{3 \cdot 0,30} \rightarrow \log_8 49 = \frac{1,68}{0,90} \cong 1,86$$

e) $\log 20 + \log 40 + \log 800$

$\log 20 = \log 2 \cdot 10 \rightarrow \text{Pela P5} \rightarrow \log 20 = \log 2 + \log 10 \rightarrow \log 20 = 0,30 + 1 = 1,30$

$\log 40 = \log 4 \cdot 10 \rightarrow \text{Pela P5} \rightarrow \log 40 = \log 4 + \log 10 \rightarrow \log 40 = \log 2^2 + \log 10$

$\text{Usando P7 e P1} \rightarrow \log 40 = 2 \cdot \log 2 + 1 \rightarrow \log 40 = 2 \cdot 0,30 + 1 = 1,60$

$\log 800 = \log 8 \cdot 100 \rightarrow \text{Pela P5} \rightarrow \log 800 = \log 8 + \log 100 \rightarrow \log 800 = \log 2^3 + \log 10^2$

$\text{Usando P7 e P3} \rightarrow \log 800 = 3 \cdot \log 2 + 2 \rightarrow \log 800 = 3 \cdot 0,30 + 2 = 2,90$

$\log 20 + \log 40 + \log 800 = 1,30 + 1,60 + 2,90 = 5,8$

g) $\log_{16} 35$

$$\text{Pela P8} \rightarrow \log_{16} 35 = \frac{\log 35}{\log 16} \rightarrow \log_{16} 35 = \frac{\log 7.5}{\log 2^4} \rightarrow \text{Usando P5 e P7}$$

$$\log_{16} 35 = \frac{\log 7 + \log 5}{4 \cdot \log 2} \rightarrow \log_{16} 35 = \frac{0,84 + (1 - 0,30)}{4 \cdot 0,30} \rightarrow \log_{16} 35 = \frac{0,84 + 0,7}{1,2} = \frac{1,54}{1,20} = 1,28$$

h) $\log 140$

$$\log 140 = \log 14 \cdot 10 \rightarrow \text{Pela P5} \rightarrow \log 140 = \log 14 + \log 10 \rightarrow \log 140 = \log 2 \cdot 7 + \log 10$$

$$\text{Pela P5} \rightarrow \log 140 = \log 2 + \log 7 + \log 10 \rightarrow \log 140 = 0,3 + 0,84 + 1 = 2,14$$

i) log 175

$$175 = 5^2 \cdot 7 \rightarrow \log 175 = \log 5^2 \cdot 7 \rightarrow \text{Pela P5} \rightarrow \log 175 = \log 5^2 + \log 7$$

$$\text{Pela P7} \rightarrow \log 175 = 2 \cdot \log 5 + \log 7 \rightarrow \log 175 = 2 \cdot (1 - \log 2) + \log 7$$

$$\log 175 = 2 \cdot (1 - 0,30) + 0,84 \rightarrow \log 175 = 1,40 + 0,84 \rightarrow \log 175 = 2,24$$