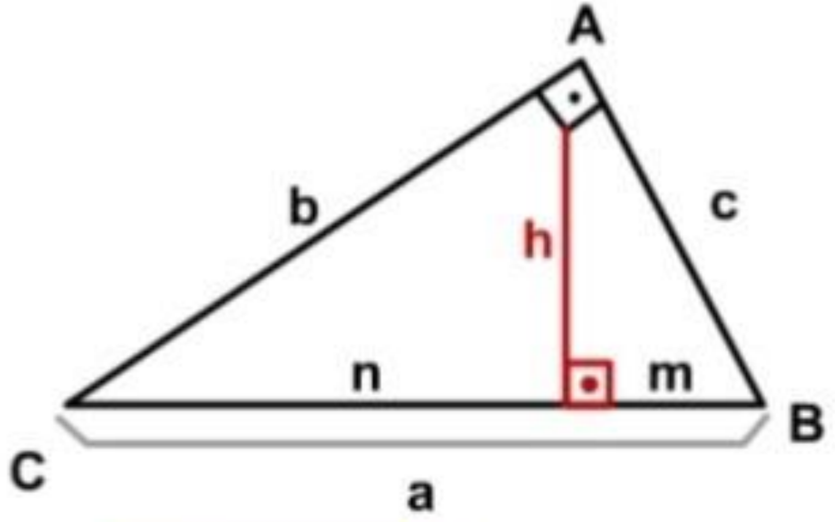
RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

EXERCÍCIOS

PROFESSOR MARCOS JOSÉ

Relações métricas no triângulo retângulo

Relações Métricas



$$a \cdot h = b \cdot c$$

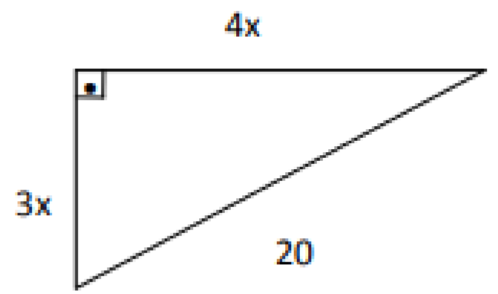
$$b^2 = a \cdot n$$
$$c^2 = a \cdot m$$

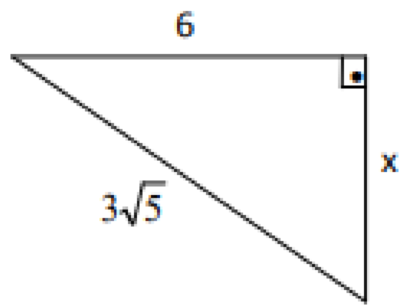
$$h^2 = m \cdot n$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Exercícios

1) Determine o valor de x nos triângulos retângulos:

a) 

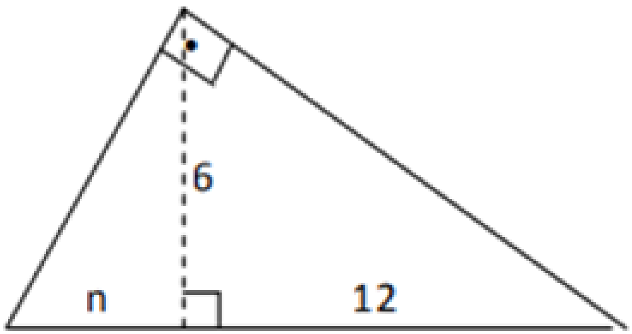
b) 

$$\boldsymbol{a)\ 20^2 = (3x)^2 + (4x)^2 \rightarrow 400 = 9x^2 + 16x^2 \rightarrow 400 = 25x^2 \rightarrow x^2 = \frac{400}{25} \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = 4}$$

$$\boldsymbol{b)\ \left(3\sqrt{5}\right)^2 = 6^2 + x^2 \rightarrow 9.5 = 36 + x^2 \rightarrow 45 = 36 + x^2 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = 3}$$

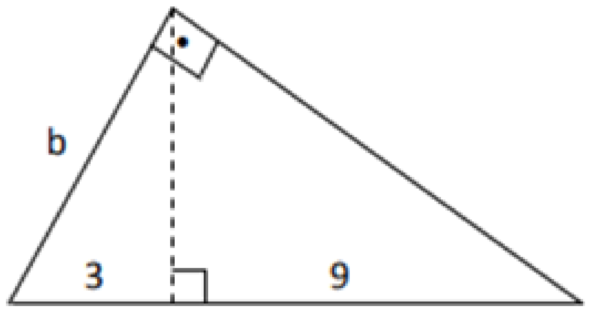
2) Aplicando as relações métricas nos triângulos retângulos abaixo, determine o valor das incógnitas:

a)



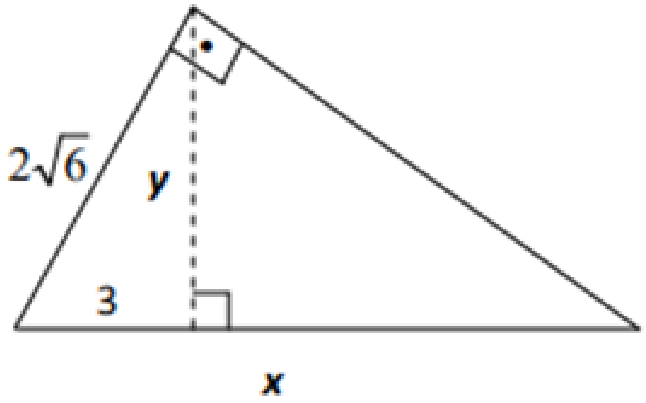
$$a)\ h^2 = m.n \to 6^2 = n.12 \to 36 = 12n \to n = 3$$

b)



$$b)\ b^2 = a.n \to b^2 = 12.3 \to b^2 = 36 \to b = 6$$

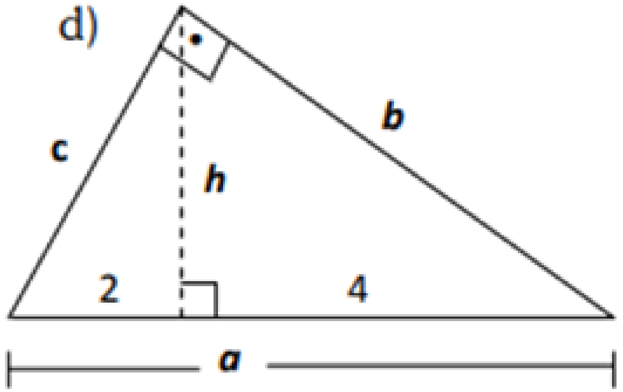
c)



$$c^2 = a.n \to (2\sqrt{6})^2 = 3.x \to 24 = 3x \to x = 8$$

$$h^2 = m.n \to y^2 = 3.5 \to y^2 = 15 \to y = \sqrt{15}$$

d)



$$a = 2 + 4 \to a = 6$$

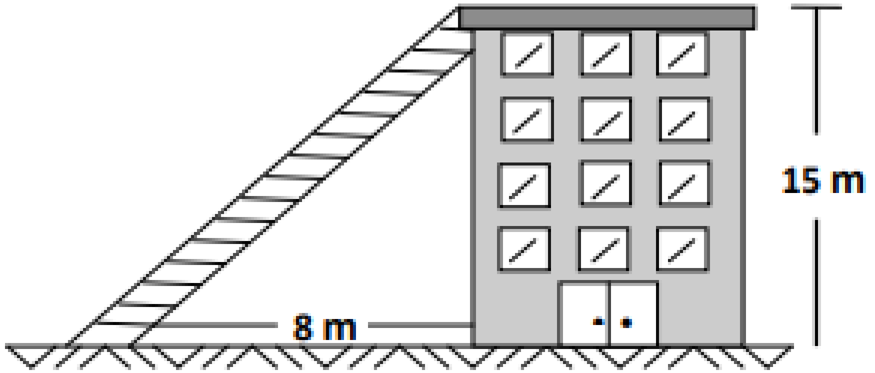
$$h^2 = m.n \to h^2 = 2.4 \to h^2 = 8 \to h = \sqrt{8} \to h = 2\sqrt{2}$$

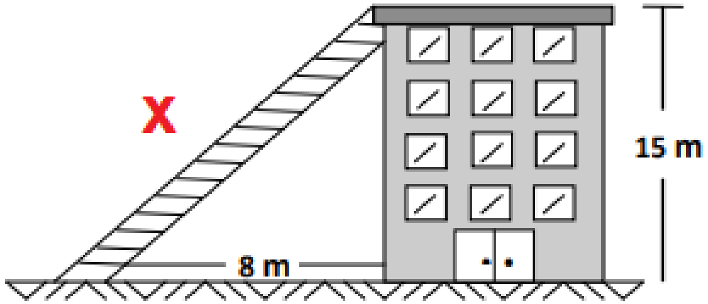
$$c^2 = a.m \to c^2 = 6.2 \to c^2 = 12 \to c = \sqrt{12} \to c = 2\sqrt{3}$$

$$b^2 = a.n \to b^2 = 6.4 \to b^2 = 24 \to b = \sqrt{24} \to b = 2\sqrt{6}$$

3) A figura mostra um edifício que tem 15 m de altura, com uma escada colocada a 8 m de sua base ligada ao topo do edifício. O comprimento dessa escada é de:

a) 12 m.
b) 30 m.
c) 15 m.
d) 17 m.
e) 20 m

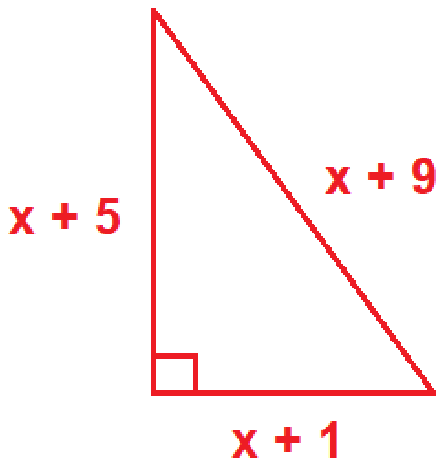




$$x^2 = 8^2 + 15^2 \rightarrow x^2 = 64 + 225 \rightarrow x^2 = 289 \rightarrow x = 17\,m$$

$GABARITO: D$

4) As medidas dos catetos de um triângulo retângulo são (x + 5) cm e (x + 1) cm e a hipotenusa (x + 9) cm. Determine o perímetro desse triângulo.



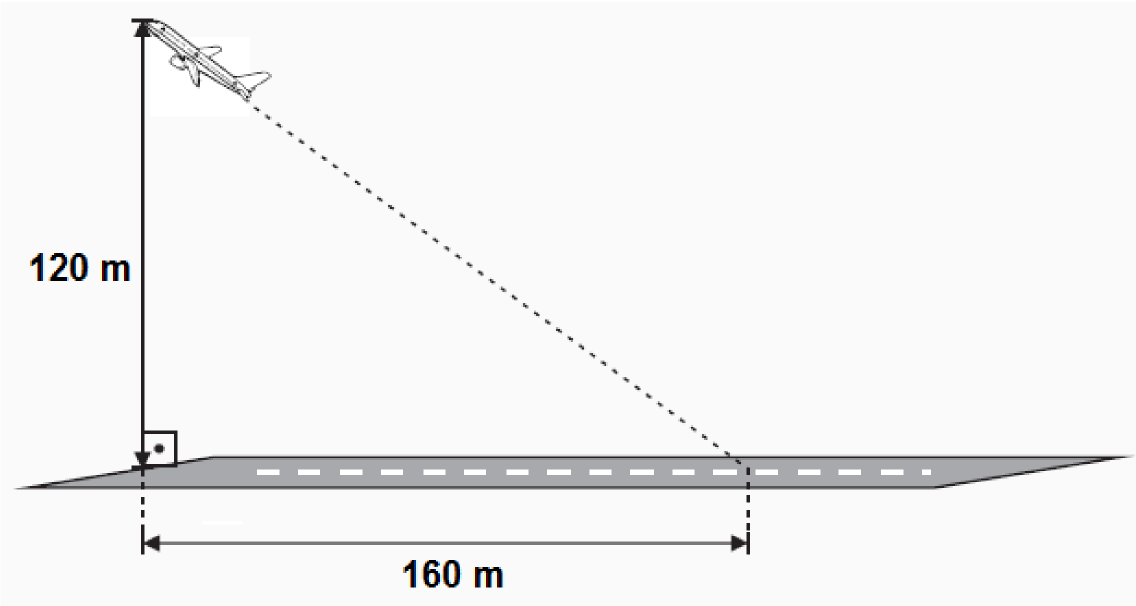
$$(x+9)^2 = (x+1)^2 + (x+5)^2 \rightarrow x^2 + 18x + 81 = x^2 + 2x + 1 + x^2 + 10x + 25$$

$$x^2 + 18x + 81 = 2x^2 + 12x + 26 \rightarrow x^2 - 6x - 55 = 0 \rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4.1.(-55) = 256$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{256}}{2} \rightarrow x = \frac{6 \pm 16}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{6+16}{2} = 11 \\ x_2 = \dfrac{6-16}{2} = -5 \ (\textit{não serve}) \end{cases}$$

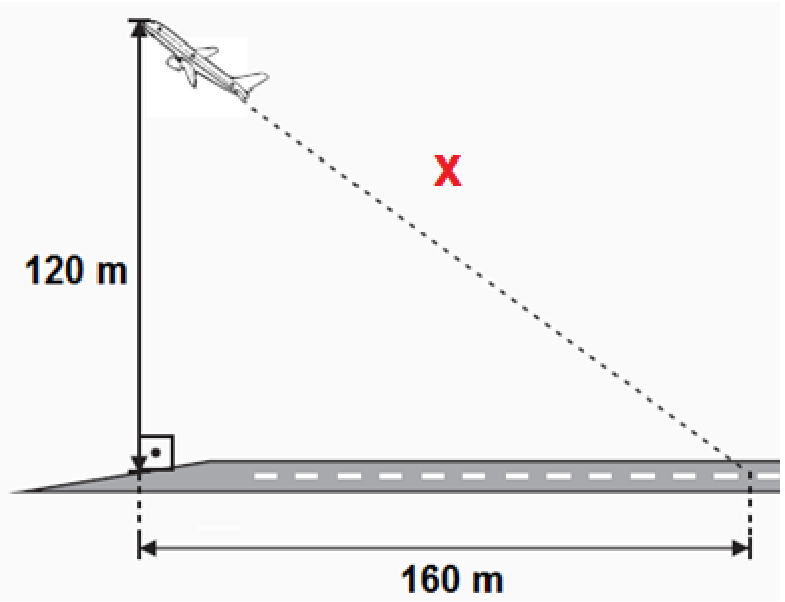
$$\textit{lados do triângulo}: 12, 16, 20 \rightarrow \textit{perímetro} = 12 + 16 + 20 = 48\ cm$$

5) (PAEBES). No processo de decolagem, um avião saiu do chão sob um determinado ângulo e se manteve em linha reta até atingir a cabeceira da pista, conforme o desenho abaixo.



De acordo com esse desenho, quantos metros esse avião percorreu do momento em que saiu do chão até o momento em que atingiu a cabeceira da pista de decolagem?

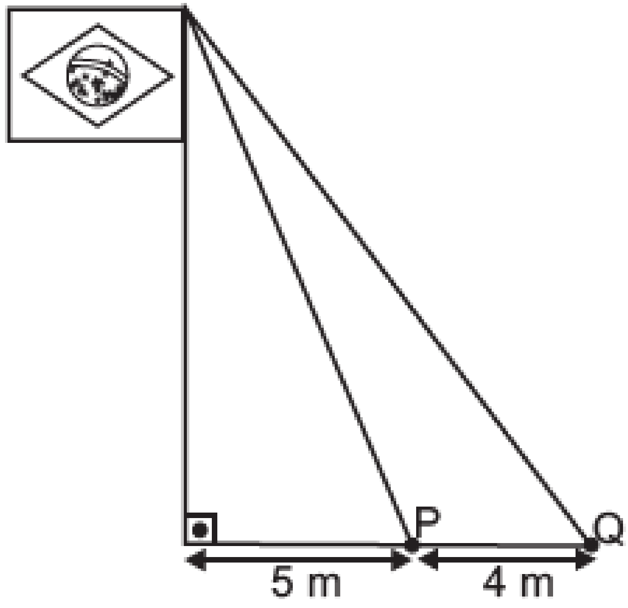
A) 200 metros.
B) 280 metros.
C) 9 600 metros.
D) 40 000 metros.



$$x^2 = 120^2 + 160^2 \rightarrow x^2 = 14400 + 25600 \rightarrow x^2 = 40000 \rightarrow x = 200\ m$$

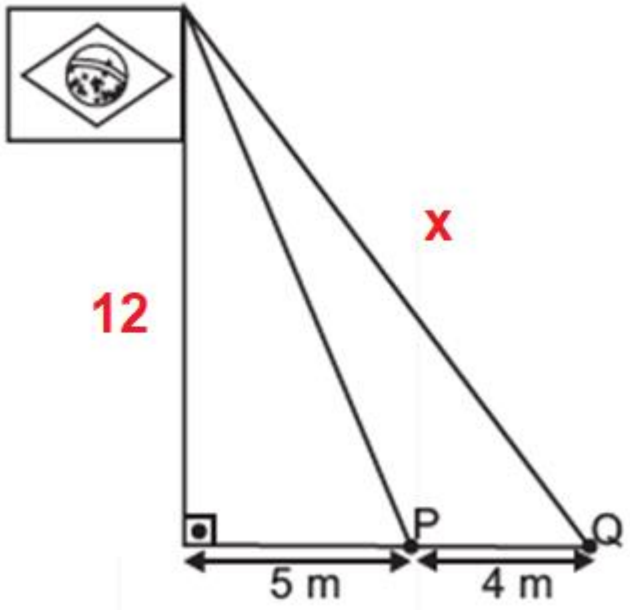
GABARITO: A

6) (SAEPE). Em um estádio, foi construído um mastro de 12 metros de altura, para ser hasteada a Bandeira Nacional. Para dar suporte ao mastro, um operário colocou um cabo de aço ligando a extremidade superior desse mastro a um ponto P. O engenheiro responsável ordenou que outro cabo fizesse a ligação da extremidade superior ao ponto Q. No desenho abaixo, está ilustrada essa situação e algumas medidas.



A equação que determina o comprimento do cabo de aço que liga a extremidade superior ao ponto Q é

A) $12^2 = x^2 + 9^2$.
B) $9^2 = x^2 + 12^2$.
C) $x^2 = 12 + 9^2$.
D) $x^2 = 12^2 + 9^2$.
E) $x^2 = 12^2 + 5^2$.

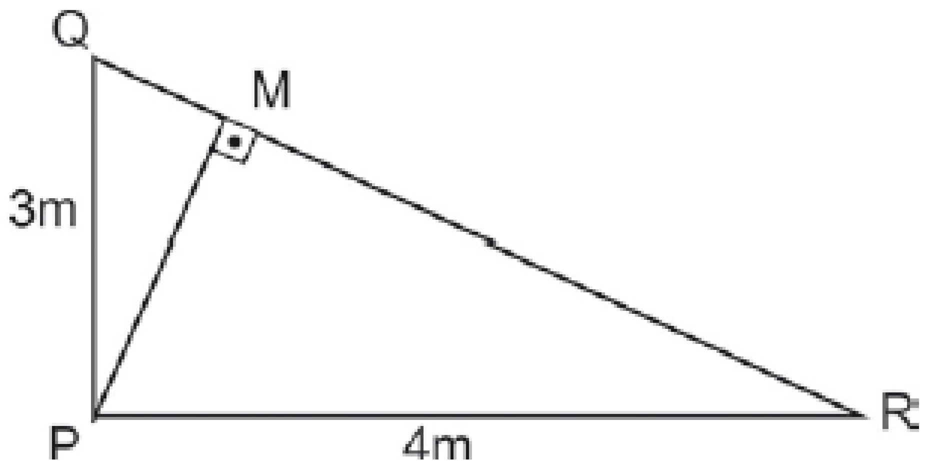


$$x^2 = 12^2 + 9^2$$

$GABARITO: D$

7) (PROEB). Para reforçar a estrutura PQR (triângulo retângulo), foi colocada uma trave PM, como mostra a figura abaixo.

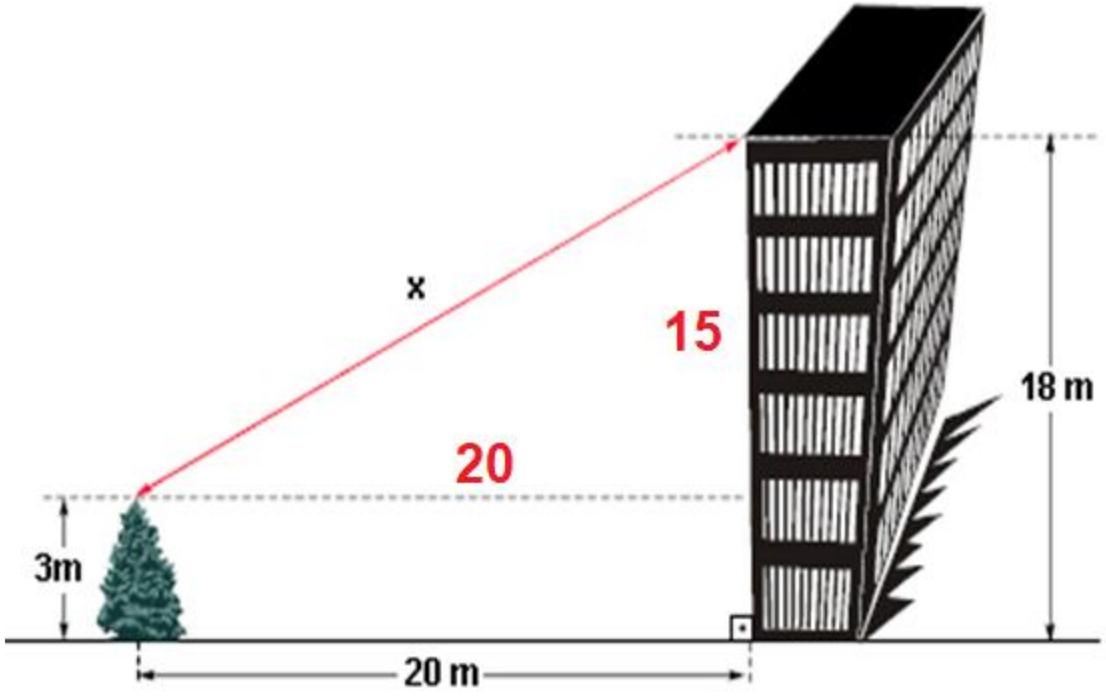
Qual o comprimento da trave PM?

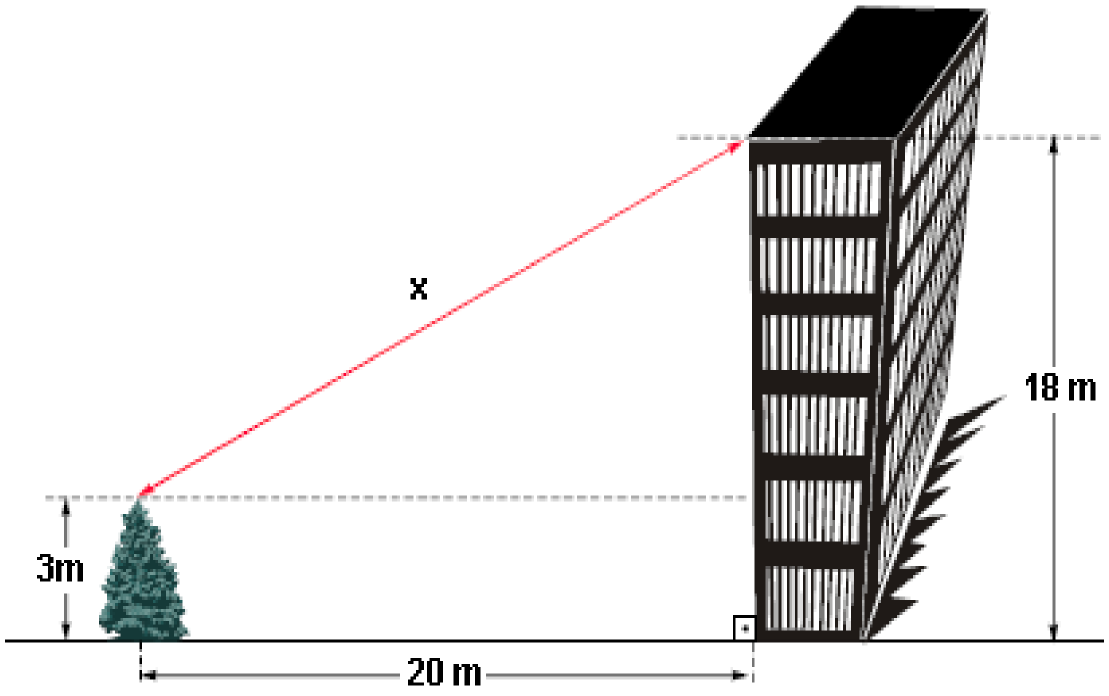


$$(QR)^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow (QR)^2 = 9 + 16 \rightarrow (QR)^2 = 25 \rightarrow QR = 5$$

$$a.h = b.c \rightarrow QR.PM = 3.4 \rightarrow 5.PM = 12 \rightarrow PM = \frac{12}{5} = 2,4\ m$$

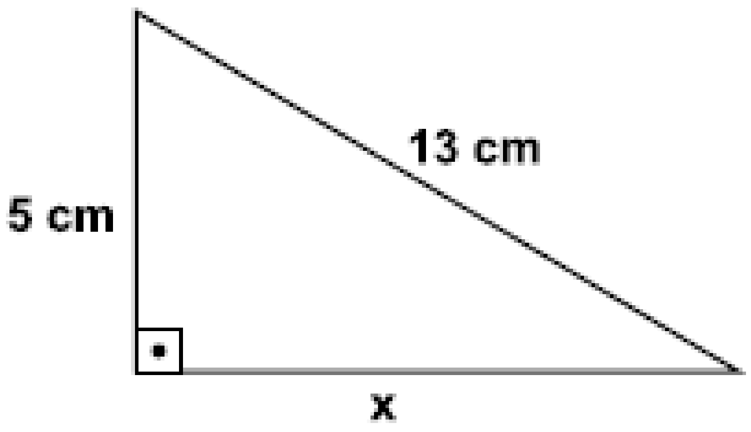
8) A altura de uma árvore é 3 m e ela está a 20 m de um edifício cuja altura é 18 m. Determine a distância entre o ponto mais alto da árvore e o ponto mais alto do edifício.





$$x^2 = 20^2 + 15^2 \rightarrow x^2 = 400 + 225 \rightarrow x^2 = 625 \rightarrow x = 25\ m$$

9) (SEAPE). Num triângulo retângulo, um dos catetos mede 5 cm e a hipotenusa mede 13 cm conforme mostra a figura abaixo.



O valor do cateto x, em cm, é

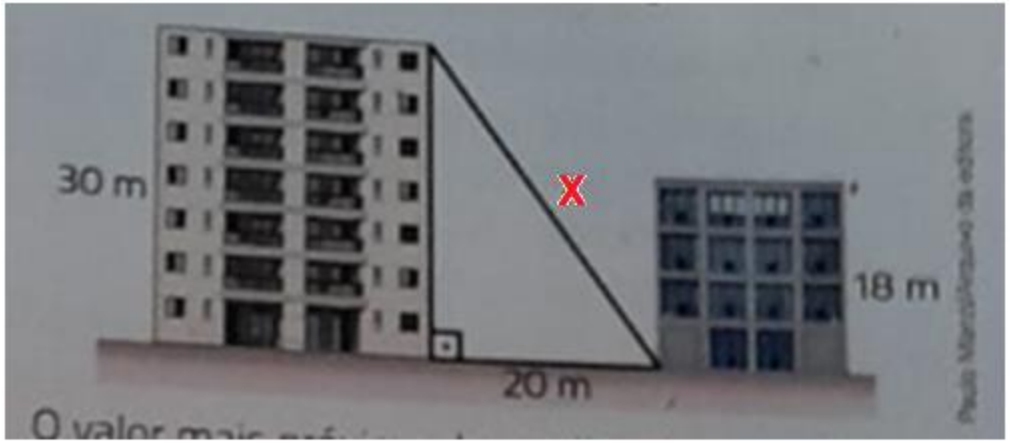
A) 1
B) 4
C) 8
D) 12
E) 18

$$\mathbf{13^2 = 5^2 + x^2 \rightarrow 169 = 25 + x^2 \rightarrow 144 = x^2 \rightarrow x = 12\ cm}$$

GABARITO: D

10) Um fio foi esticado do topo de um prédio até a base de outro, conforme mostra a figura a seguir. O valor mais próximo da medida do comprimento desse fio é:

a) 34 m b) 35 m c) 36 m d) 37 m



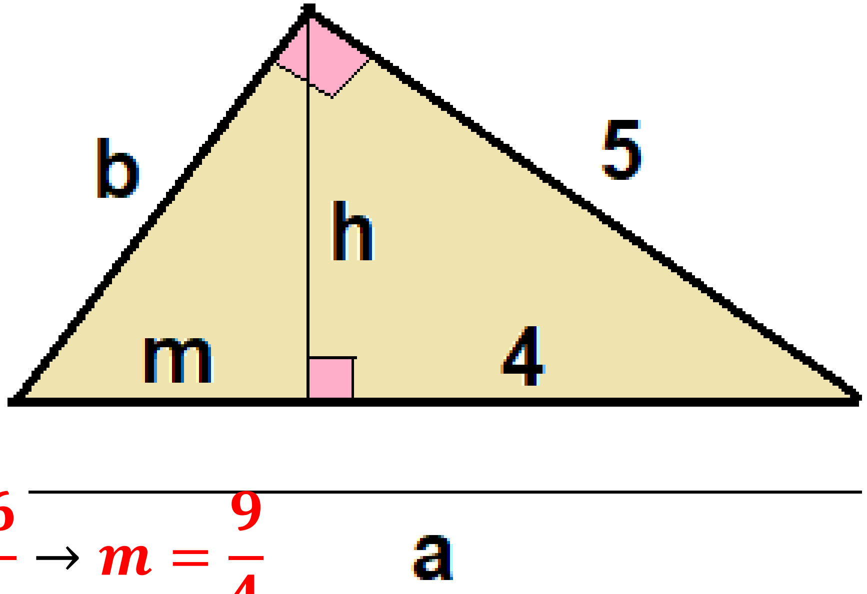
$$x^2 = 30^2 + 20^2 \rightarrow x^2 = 900 + 400 \rightarrow x^2 = 1300 \rightarrow x = \sqrt{1300} \rightarrow x \cong 36,05$$

$GABARITO: C$

11) Considere as medidas de comprimento dadas nesta região triangular, limitada por triângulo retângulo, e calcule o que se pede.

a) As medidas de h, a, m e b.

b) A medida dessa área.



$$5^2 = h^2 + 4^2 \rightarrow 25 = h^2 + 16 \rightarrow h^2 = 9 \rightarrow h = 3$$

$$c^2 = a.n \rightarrow 5^2 = 4.a \rightarrow 25 = 4.a \rightarrow a = \frac{25}{4}$$

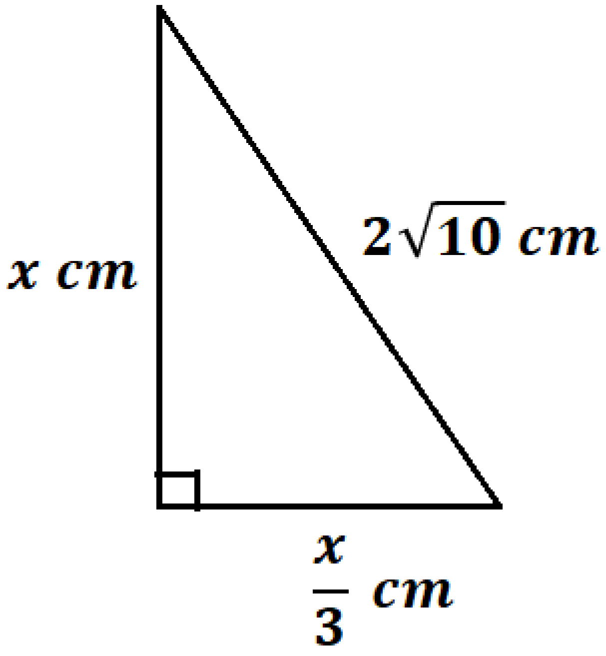
$$m + 4 = a \rightarrow m + 4 = \frac{25}{4} \rightarrow m = \frac{25}{4} - 4 \rightarrow m = \frac{25}{4} - \frac{16}{4} \rightarrow m = \frac{9}{4}$$

$$b^2 = a.m \rightarrow b^2 = \frac{25}{4}.\frac{9}{4} \rightarrow b^2 = \frac{225}{16} \rightarrow b = \frac{15}{4}$$

$$A = \frac{a.h}{2} \rightarrow A = \frac{\frac{25}{4}.3}{2} \rightarrow A = \frac{\frac{75}{4}}{2} \rightarrow A = \frac{75}{4}.\frac{1}{2} \rightarrow A = \frac{75}{8}$$

$$A = \frac{cateto\ x\ cateto}{2} \rightarrow A = \frac{\frac{15}{4}.5}{2} \rightarrow A = \frac{\frac{75}{4}}{2} = \frac{75}{8}$$

12) Encontre o perímetro e a área da região triangular abaixo:



$$\left(2\sqrt{10}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^2 \rightarrow 4.10 = x^2 + \frac{x^2}{9} \rightarrow 40 = x^2 + \frac{x^2}{9}$$

$$360 = 9x^2 + x^2 \rightarrow 360 = 10x^2 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = 6$$

$$lados\ do\ triângulo \rightarrow \begin{cases} hipotenusa = 2\sqrt{10} \\ cateto = 6 \\ cateto = \frac{6}{3} = 2 \end{cases}$$

$$perímetro = 6 + 2 + 2\sqrt{10} = \left(8 + 2\sqrt{10}\right)\ cm$$

$$área = \frac{cateto\ x\ cateto}{2} = \frac{6.2}{2} = 6\ cm^2$$

13) Em um triângulo retângulo, a hipotenusa tem medida de comprimento de $3\sqrt{5}\ cm$ e um dos catetos tem medida de comprimento 3 cm a menos do que o outro. Qual é a medida da área da região plana limitada por esse triângulo?

$$lados\ do\ triângulo \rightarrow \begin{cases} hipotenusa = 3\sqrt{5} \\ cateto = x \\ cateto = x - 3 \end{cases}$$

$$\left(3\sqrt{5}\right)^2 = x^2 + (x-3)^2 \rightarrow 9.5 = x^2 + x^2 - 6x + 9 \rightarrow 45 = 2x^2 - 6x + 9 \rightarrow 2x^2 - 6x - 36 = 0$$

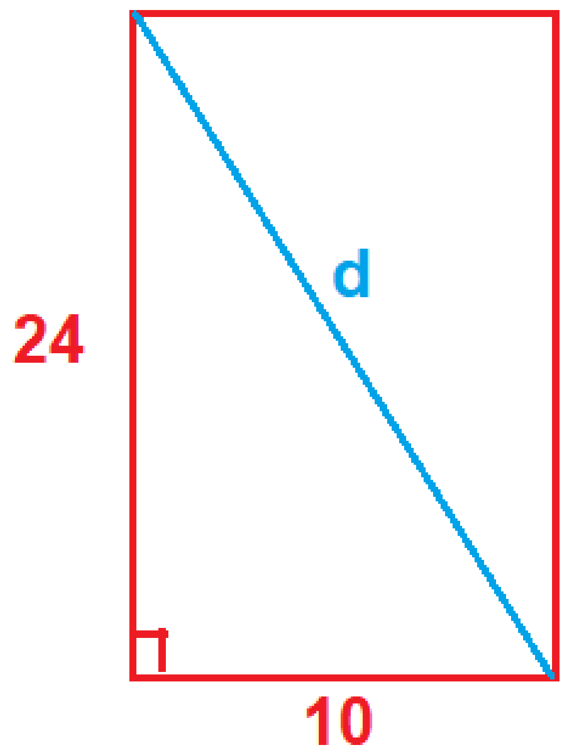
$$x^2 - 3x - 18 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.(-18)}}{2.1} \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2} \rightarrow x = \frac{3 \pm 9}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3+9}{2} = 6 \\ x_2 = \dfrac{3-9}{2} = -3\ (não\ serve) \end{cases}$$

$$lados\ do\ triângulo \rightarrow \begin{cases} hipotenusa = 3\sqrt{5} \\ cateto = 6 \\ cateto = 6 - 3 = 3 \end{cases}$$

$$A = \frac{cateto\ x\ cateto}{2} \rightarrow A = \frac{6.3}{2} = 9\ cm^2$$

14) Determine a medida do comprimento da diagonal de um retângulo que tem por base um comprimento de 10 cm e altura igual a 24 cm.



$$d^2 = 10^2 + 24^2 \rightarrow d^2 = 100 + 576 \rightarrow d^2 = 676 \rightarrow d = \sqrt{676} \rightarrow d = 26\ cm$$

15) A hipotenusa de um triângulo retângulo tem medida 10 cm e a razão entre os catetos é $\frac{3}{4}$. Quais são as medidas dos catetos?

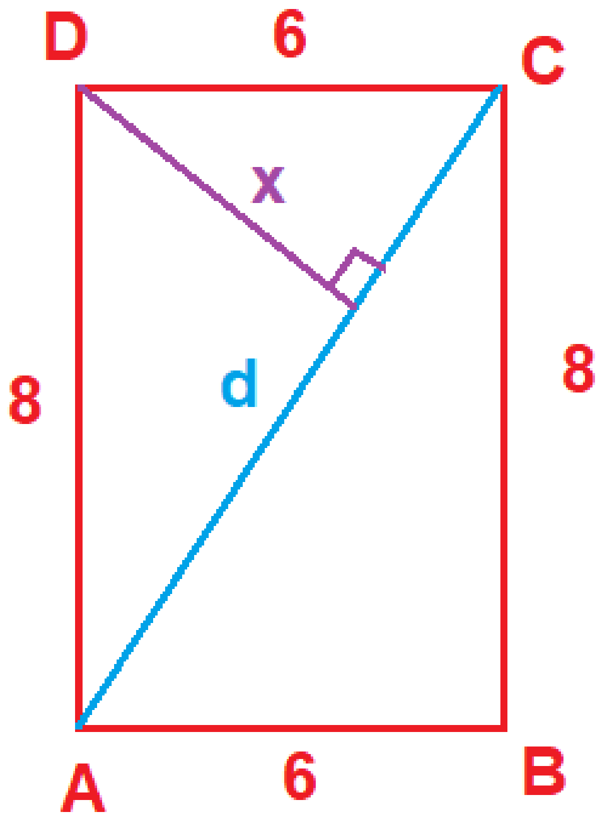
$$\begin{cases} a = 10 \\ \frac{b}{c} = \frac{3}{4} \rightarrow b = \frac{3c}{4} \end{cases}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 10^2 = \left(\frac{3c}{4}\right)^2 + c^2 \rightarrow 100 = \frac{9c^2}{16} + c^2 \rightarrow 1600 = 9c^2 + 16c^2 \rightarrow 1600 = 25c^2$$

$$c^2 = \frac{1600}{25} \rightarrow c^2 = 64 \rightarrow c = \sqrt{64} \rightarrow c = 8\ cm$$

$$b = \frac{3c}{4} \rightarrow b = \frac{3.8}{4} \rightarrow b = 6\ cm$$

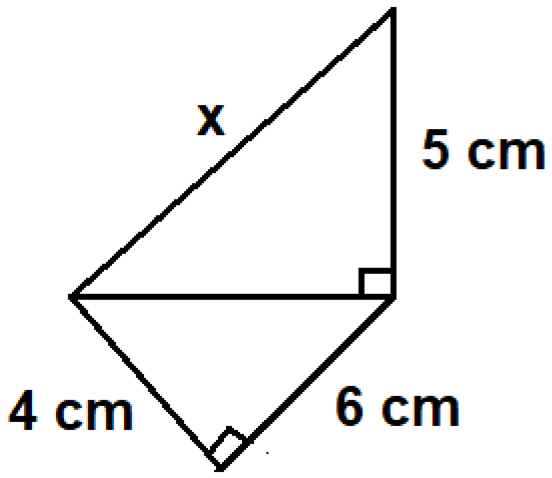
16) Marcia traçou um retângulo ABCD tal que AB = 6 cm e BC = 8 cm. Depois traçou a diagonal AC e o segmento de reta mais curto possível ligando D a um ponto de AC. Qual é a medida desse segmento de reta?

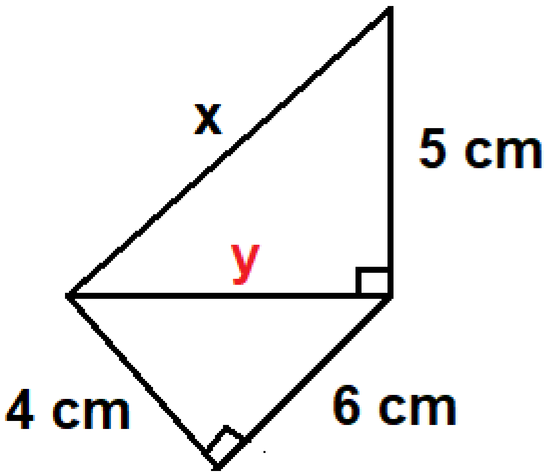


$$d^2 = 6^2 + 8^2 \rightarrow d^2 = 36 + 64 \rightarrow d^2 = 100 \rightarrow d = 10\ cm$$

$$No\ \Delta ADC \rightarrow a.h = b.c \rightarrow d.x = 6.8 \rightarrow 10x = 48 \rightarrow x = 4{,}8\ cm$$

17) Calcule x na figura a seguir.

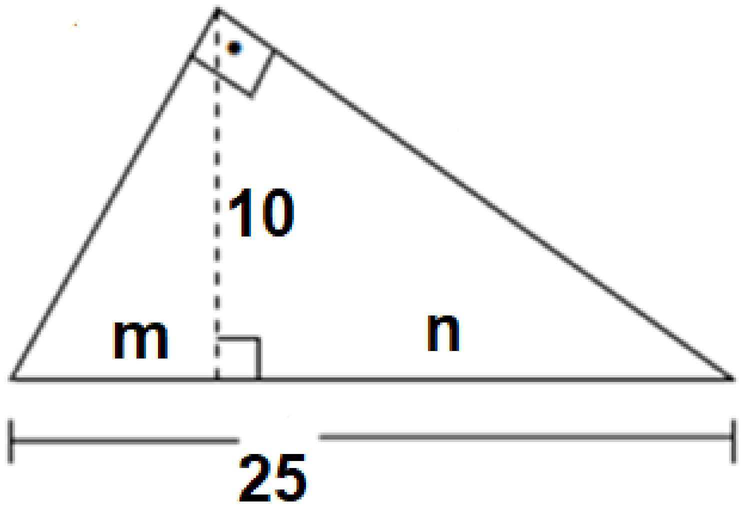




$$y^2 = 4^2 + 6^2 \rightarrow y^2 = 16 + 36 \rightarrow y^2 = 52$$

$$x^2 = y^2 + 5^2 \rightarrow x^2 = 52 + 25 \rightarrow x^2 = 77 \rightarrow x = \sqrt{77}\ cm$$

18) Determine os valores de m e n (m < n).



$$\begin{cases} m+n=a \rightarrow m+n=25 \\ h^2=m.n \rightarrow 10^2=m.n \end{cases}$$

$$m=25-n \rightarrow 100=(25-n).n \rightarrow 100=25n-n^2 \rightarrow n^2-25n+100=0$$

$$n=\frac{-(-25)\pm\sqrt{(-25)^2-4.1.100}}{2.1} \rightarrow n=\frac{25\pm\sqrt{225}}{2} \rightarrow n=\frac{25\pm15}{2} \rightarrow \begin{cases} n_1=\frac{25+15}{2}=20 \\ n_2=\frac{25-15}{2}=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n=20 \rightarrow m=25-n \rightarrow m=25-20 \rightarrow m=5 \\ n=5 \rightarrow m=25-n \rightarrow m=25-5 \rightarrow m=20\ (\text{não serve, pois } m<n) \end{cases}$$