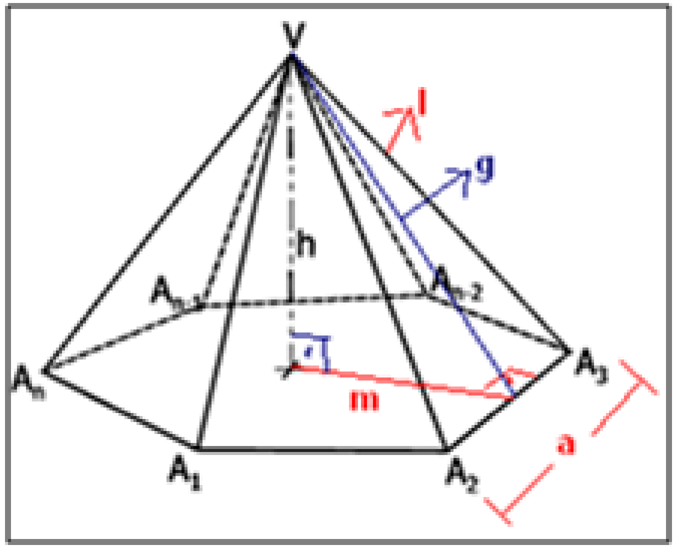
GEOMETRIA ESPACIAL - PIRÂMIDES

PROFESSOR MARCOS JOSÉ

PIRÂMIDE

Considerando um polígono convexo $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$,..., $\mathbf{A_n}$ em um plano $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ e um ponto V fora de $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$. Chama-se pirâmide de base $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$,..., $\mathbf{A_n}$ e vértice **V** o poliedro de **n** faces triangulares e uma base poligonal assim obtido. Se a base for um polígono regular e seu centro coincide com o pé da perpendicular baixada do vértice ao plano da base a pirâmide é dita regular.

Os elementos da pirâmide regular são:



- apótema da base: m
- apótema da pirâmide (altura da face): g
- aresta lateral: l
- aresta da base: a

A relação entre esses elementos é: $g^2 = h^2 + m^2$

Classificação:
i) Uma pirâmide é reta quando o vértice V é equidistante dos vértices da base.
ii) Pirâmide regular é uma pirâmide cuja base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da pirâmide. Uma pirâmide regular possui arestas laterais congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles. Neste caso, há as relações abaixo:

1º) $l^2 = g^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$
2º) $g^2 = h^2 + m^2$

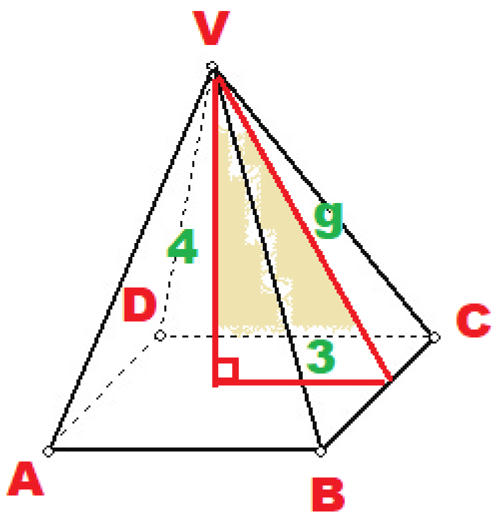
Natureza da pirâmide: Uma pirâmide será triangular, quadrangular, hexagonal, etc, conforme sua base seja um triângulo, quadrilátero, hexágono, etc.
- **Área lateral da pirâmide**: É a soma das áreas dos triângulos das faces.
- **Área total da pirâmide**: É a soma da área lateral com a área da base.
- **Volume:** $\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\ x\ A_{base}\ x\ h}$

Observação: Apótemas e áreas dos principais polígonos regulares.

Polígonos	Apótema (m)	Área
Triângulo equilátero	$\frac{L.\sqrt{3}}{6}$	$\frac{L^2.\sqrt{3}}{4}$
Quadrado	$\frac{L}{2}$	L^2
Hexágono regular	$\frac{L.\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\,.\,L^2.\sqrt{3}}{2}$

Exercícios

1) Uma pirâmide quadrangular regular tem 4 m de altura e a aresta da base mede 6 m. Calcule seu volume e a área total.



$$g^2 = 3^3 + 4^2 \rightarrow g^2 = 9 + 16 \rightarrow g^2 = 25 \rightarrow g = 5\,m$$

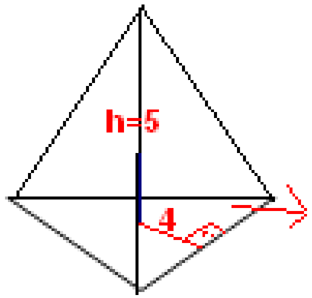
$$A_{base} = 6^2 = 36\,m^2$$

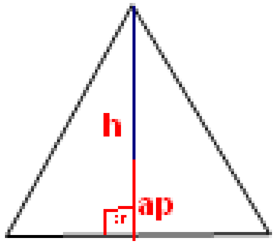
$$A_{lateral} = 4\,x\,\frac{6\,x\,5}{2} = 4\,x\,15 = 60\,m^2$$

$$A_{total} = A_{base} + A_{lateral} = 36 + 60 = 96\,m^2$$

$$V = \frac{1}{3}\,x\,A_{base}\,x\,h = \frac{1}{3}\,x\,36\,x\,4 = 12\,x\,4 = 48\,m^3$$

2) Uma pirâmide triangular regular tem 5 cm de altura e o apótema da base mede 4 cm. Calcule o volume da pirâmide.

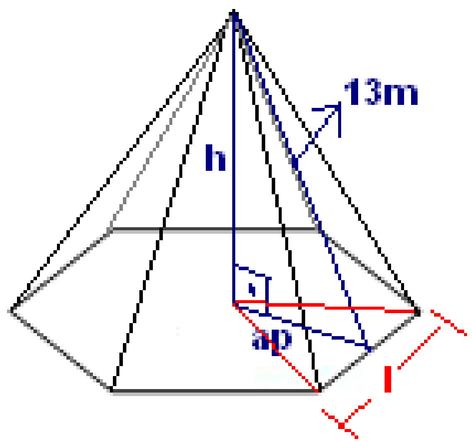




$$\begin{cases} a_p = 4 \\ a_p = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{L.\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases} \rightarrow 4 = \frac{L.\sqrt{3}}{6} \rightarrow L = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}cm$$

$$V = \frac{A_b.h}{3} = \frac{\left(\frac{L^2\sqrt{3}}{4}\right).h}{3} = \frac{\left(\frac{\left(8\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}\right).(5)}{3} = \left(\frac{(64)(3)\sqrt{3}}{12}\right).(5) = \left(16\sqrt{3}\right)(5) = 80\sqrt{3}cm^3$$

3) Calcule o volume de uma pirâmide hexagonal regular de área da base $288.\sqrt{3}\,m^2$ e apótema 13 m.



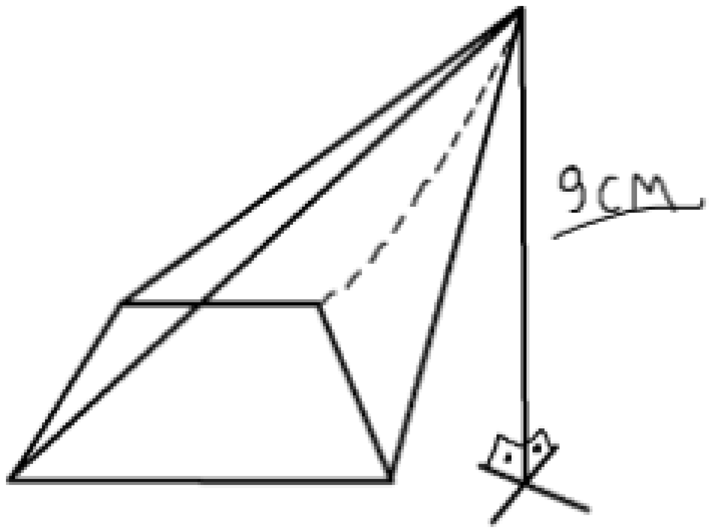
$$\begin{cases} A_b = 6.\left(\dfrac{L^2\sqrt{3}}{4}\right) \\ A_b = 288\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow 6.\left(\dfrac{L^2\sqrt{3}}{4}\right) = 288\sqrt{3} \rightarrow L^2 = \dfrac{(4).(288)}{6} \rightarrow L = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}\ m$$

$$apótema\ da\ base \rightarrow a_p = m = \left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{(8\sqrt{3})\sqrt{3}}{2} = \frac{(8)(3)}{2} = 12\ m$$

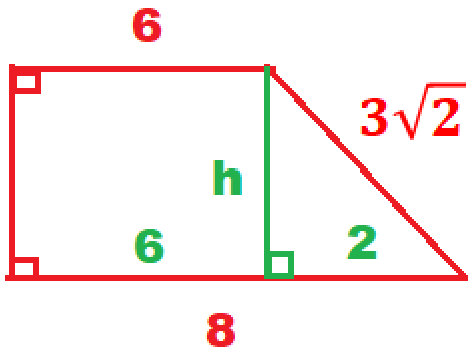
$$g^2 = h^2 + m^2 \rightarrow 13^2 = h^2 + 12^2 \rightarrow 169 = h^2 + 144 \rightarrow h^2 = 25 \rightarrow h = 5\ m$$

$$V = \frac{1}{3}.A_{base}.h \rightarrow V = \frac{1}{3}.288\sqrt{3}.5 \rightarrow V = 96.\sqrt{3}.5 \rightarrow V = 480.\sqrt{3}\ m^3$$

4) Calcule o volume de uma pirâmide de 9cm de altura cuja base é um trapézio retângulo, cujos lados paralelos medem 6cm e 8cm e o lado oblíquo aos lados paralelos mede $3\sqrt{2}$ cm, conforme mostra a figura.



$\boldsymbol{Base}$:



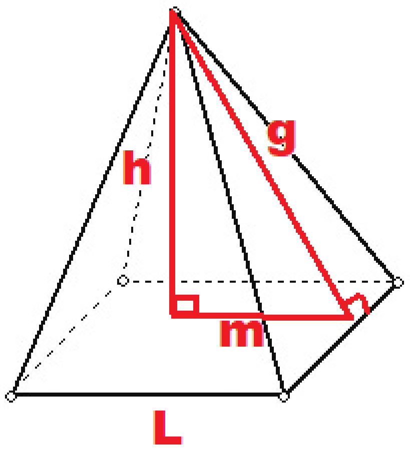
$$\left(3\sqrt{2}\right)^2 = h^2 + 2^2 \rightarrow 18 = h^2 + 4 \rightarrow h^2 = 14 \rightarrow h = \sqrt{14}$$

$$A_{base} = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{(6+8).\sqrt{14}}{2} = 7.\sqrt{14}$$

$$V = \frac{1}{3}.7.\sqrt{14}.9 = 21.\sqrt{14}\ cm^3$$

5) Uma pirâmide quadrangular regular tem 260 cm² de área lateral e 13 cm de apótema. Assim, o volume dessa pirâmide é ________ cm³:

a) 100 b) 200 c) 300 d) 400



$$g = 13$$

$$A_{lateral} = 260 \rightarrow 4\ x\ \frac{L\ x\ 13}{2} = 260 \rightarrow 26L = 260 \rightarrow L = 10\ cm$$

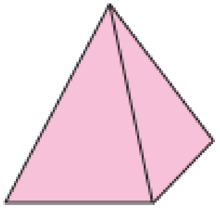
$$m = \frac{L}{2} \rightarrow m = \frac{10}{2} = 5$$

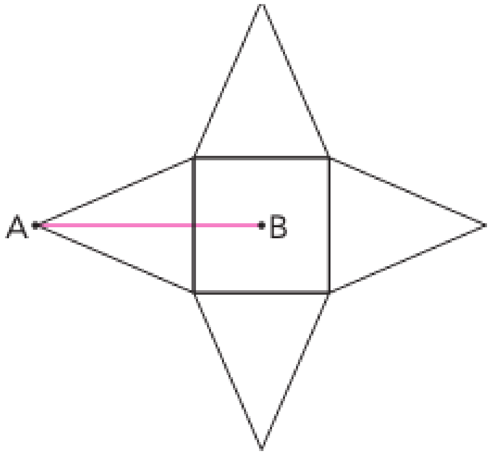
$$g^2 = h^2 + m^2 \rightarrow 13^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow 169 = h^2 + 25 \rightarrow h^2 = 144 \rightarrow h = \sqrt{144} = 12\ cm$$

$$V = \frac{1}{3}\ x\ A_{base}\ x\ h = \frac{1}{3}\ x\ 10^2 x\ 12 = 100\ x\ 4 = 400\ cm^3$$

$GABARITO: D$

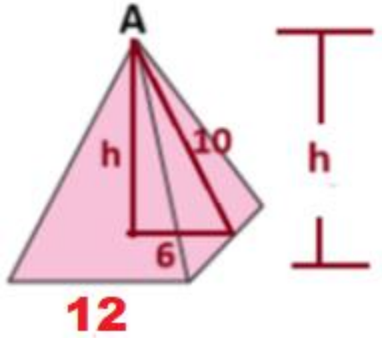
6) (UERJ) Observe a seguir a imagem de uma pirâmide quadrangular regular e a planificação de sua superfície total. Na planificação, o ponto A representa um vértice de uma face lateral e o ponto B o centro da base, sendo AB = 16 cm.

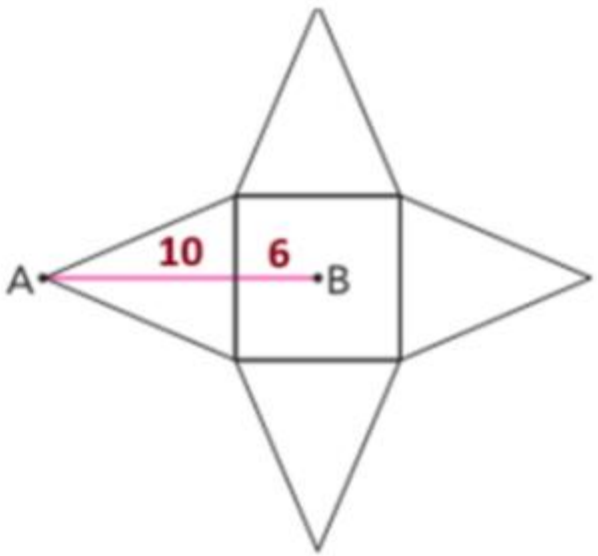




Se a aresta da base dessa pirâmide mede 12 cm, seu volume, em cm³, é igual a:

(A) 384 (B) 376 (C) 364 (D) 356



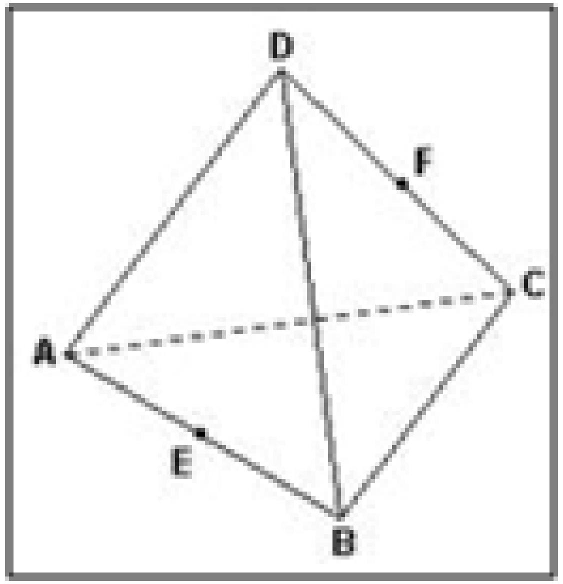


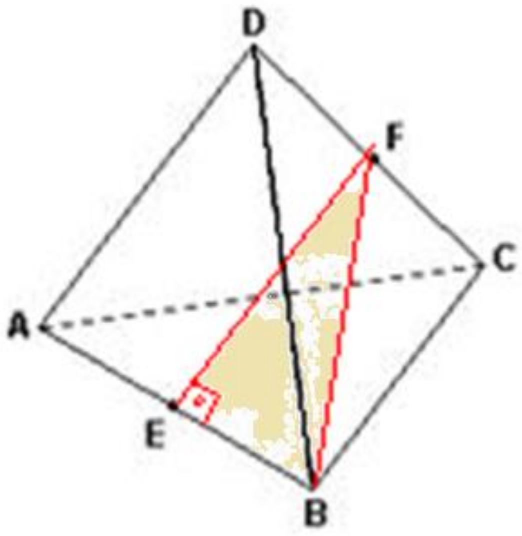
$$g^2 = h^2 + m^2 \rightarrow 10^2 = 6^2 + h^2 \rightarrow 100 = 36 + h^2 \rightarrow 64 = h^2 \rightarrow h = 8$$

$$V = \frac{1}{3}\ x\ A_{base}\ x\ h = \frac{1}{3}\ x\ 12^2 x\ 8 = \frac{144\ x\ 8}{3} = 48\ x\ 8 = 384\ cm^3$$

$GABARITO: A$

7) (FUVEST) Na figura abaixo, ABCD é um tetraedro regular de lado a. Sejam E e F os pontos médios de AB e CD, respectivamente. Calcule o valor de EF, em função de a.





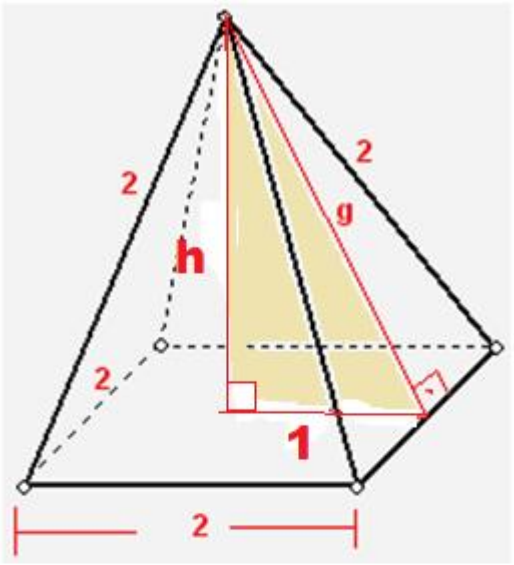
$$Como\ \acute{e}\ um\ tetraedro\ regular\ s\tilde{a}o\ 4\ tri\hat{a}ngulos\ equil\acute{a}teros.\ Assim:$$

$$\begin{cases} \overline{FB} = h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ \overline{EB} = \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

$$(\overline{FB})^2 = (\overline{EF})^2 + (\overline{EB})^2 \rightarrow \left(\frac{a.\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (\overline{EF})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\overline{EF} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

8) Calcule o volume da pirâmide quadrangular na qual todas as arestas valem 2 cm.

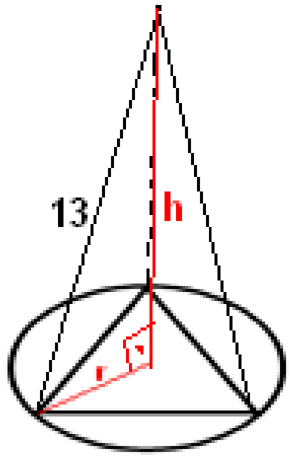


$$g = \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}; \quad m = 1$$

$$g^2 = h^2 + m^2 \rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^2 = h^2 + 1^2 \rightarrow 3 = h^2 + 1 \rightarrow h^2 = 2 \rightarrow h = \sqrt{2}$$

$$V = \left(\frac{A_{base}.h}{3}\right) = \left(\frac{L^2.h}{3}\right) = \left(\frac{(2)^2.(\sqrt{2})}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\ cm^3$$

9) Calcule o volume da pirâmide triangular regular de aresta lateral 13 cm e cuja base está inscrita num círculo de área 25π cm².

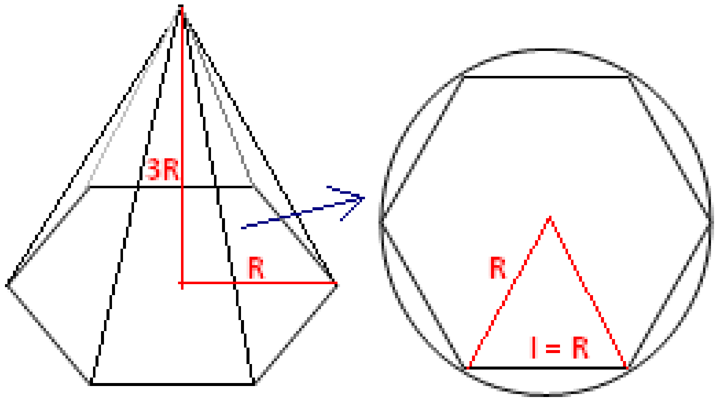


$$\pi.r^2 = 25\pi \rightarrow r = \sqrt{25} = 5cm;\ L = r\sqrt{3} \rightarrow L = 5\sqrt{3}cm$$

$$13^2 = r^2 + h^2 \rightarrow h = \sqrt{(13)^2 - (5)^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12\ cm$$

$$V = \left(\frac{A_{base}.h}{3}\right) = \left(\frac{\frac{l^2\sqrt{3}}{4}.h}{3}\right) = \left(\frac{\left(\left(5\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}\right).(12)}{12}\right) = \left(5\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3} = 75\sqrt{3}\ cm^3$$

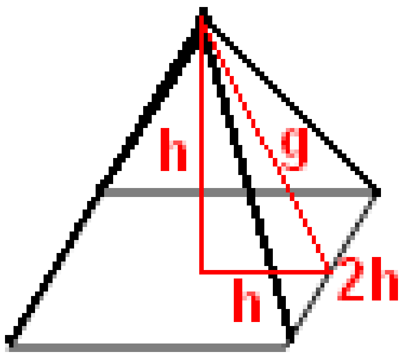
10) A base de uma pirâmide regular de altura **3r** é um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio **r**. Calcule o volume dessa pirâmide.



$$\begin{cases} A_b = 6.\left(\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}\right) = 3.\left(\dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}\right) \\ V_{pirâmide} = \dfrac{A_b.(h)}{3} \end{cases} \rightarrow V = \dfrac{3.\left(\dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}\right).(3R)}{3} = \dfrac{3R^3\sqrt{3}}{2}$$

11) (UNIVASF) Uma pirâmide regular de base quadrada tem o lado da base medindo o dobro da altura e área lateral medindo $144.\sqrt{2}\ cm^2$. O volume dessa pirâmide, em cm³, é:

a) $72.\sqrt{2}$ b) 288 c) $576.\sqrt{2}$ d) 864 e) 2304



$$g^2 = h^2 + h^2 \rightarrow g = \sqrt{2h^2} = h\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} A_{lateral} = 4\left(\dfrac{2h.g}{2}\right) = 2\left((2h).(h\sqrt{2})\right) \\ A_{lateral} = 144\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow 4\sqrt{2}.h^2 = 144\sqrt{2} \rightarrow h^2 = \frac{144}{4} \rightarrow h = \sqrt{36} = 6$$

$$V = \left(\frac{A_{base}.h}{3}\right) = \left(\frac{L^2.h}{3}\right) = \left(\frac{(12)^2.(6)}{3}\right) = (144)(2) = 288\ cm^3$$

$GABARITO: B$

12) (UNIRIO) Um prisma de altura H e uma pirâmide têm bases com a mesma área. Se o volume do prisma é a metade do volume da pirâmide, a altura da pirâmide é:

a) H/6 b) H/3 c) 2H d) 3H e) 6H

$$\boldsymbol{V(prisma) = \frac{V(pir\hat{a}mide)}{2} \rightarrow A_{base}.H = \frac{\frac{A_{base}.H'}{3}}{2} \rightarrow 2.A_{base}.H = \frac{A_{base}.H'}{3}}$$

$$\boldsymbol{2H = \frac{H'}{3} \rightarrow H' = 6.H.}$$

$\boldsymbol{GABARITO: E}$

13) (PUC) Uma pirâmide regular de base hexagonal é tal que a altura mede 8cm e a aresta da base mede $2\sqrt{3}\ cm$. O volume dessa pirâmide, em centímetros cúbicos, é:

$(A)\ 24\sqrt{3}$

$(B)\ 36\sqrt{3}$

$(C)\ 48\sqrt{3}$

$(D)\ 72\sqrt{3}$

$(E)\ 144\sqrt{3}$

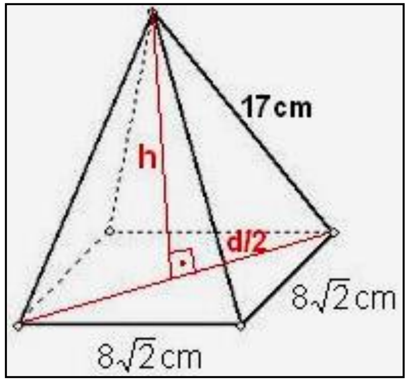
$$\begin{cases} V(pir\hat{a}mide) = \dfrac{A_{base}.\,h}{3} \\ A_{base} = 6.\left(\dfrac{L^2\sqrt{3}}{4}\right) = 3.\left(\dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{2}\right) = 3.\left(\dfrac{(12).\,(\sqrt{3})}{2}\right) = 18\sqrt{3} \end{cases}$$

$$V(pir\hat{a}mide) = \frac{\left(18\sqrt{3}\right).\,(8)}{3} = 48\sqrt{3}.$$

$GABARITO: C$

14) (PUC) A base de uma pirâmide reta é um quadrado cujo lado mede $8.\sqrt{2}\,cm$. Se as arestas laterais da pirâmide medem 17 cm, o seu volume, em centímetros cúbicos, é:

a) 520 b) 640 c) 680 d) 750 e) 780



$$\begin{cases} d = L\sqrt{2} = (8\sqrt{2}).(\sqrt{2}) = (8).(2) = 16cm \rightarrow \dfrac{d}{2} = 8cm \\ h = \sqrt{(17)^2 - (8)^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15cm \\ V(pirâmide) = \dfrac{A_{base}.h}{3} \end{cases}$$

$$V(pirâmide) = \frac{(8\sqrt{2})^2.(15)}{3} \rightarrow V(pirâmide) = (128).(5) = 640cm^3.$$

GABARITO: B