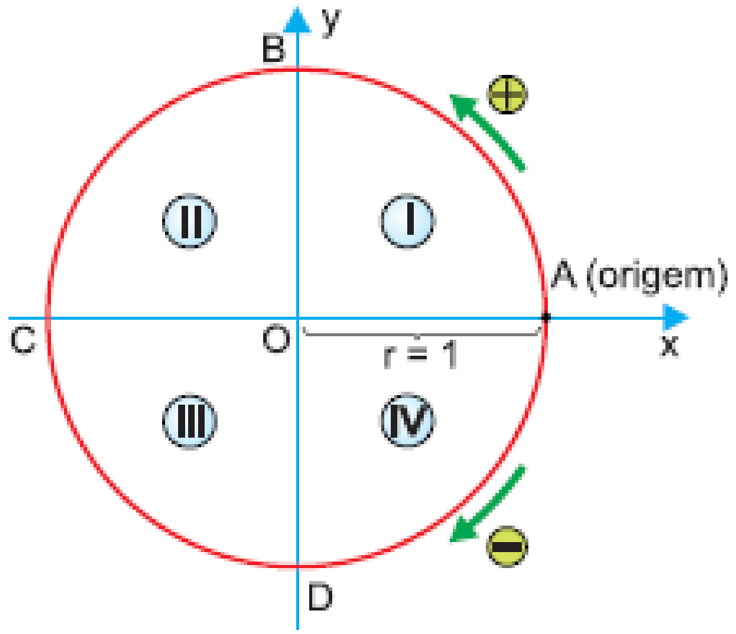
TRIGONOMETRIA

CIRCUNFERÊNCIA (OU CICLO) TRIGONOMÉTRICA

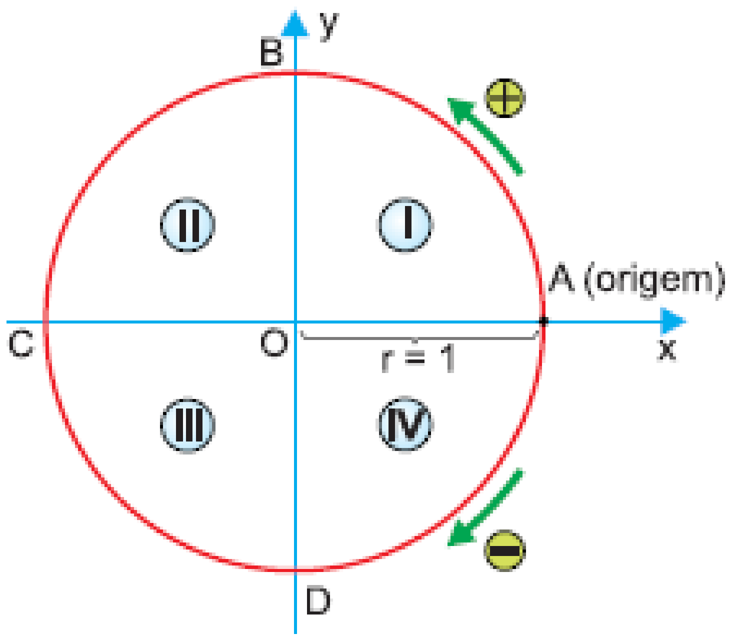
PROFESSOR MARCOS JOSÉ

A circunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico é de extrema importância para o estudo da Trigonometria, pois é baseado nela que todos os teoremas serão deduzidos. Trata-se de uma circunferência com ***centro na origem*** do sistema de eixos coordenados e de ***raio 1***, como é mostrado na figura abaixo:



Consideremos, no ciclo trigonométrico de origem **A**, um sistema cartesiano ortogonal xOy conforme mostra a figura. Os pontos A(1; 0), B(0; 1), C(–1;0) e D(0; –1) dividem o ciclo trigonométrico em quatro quadrantes.

Quando dizemos que um arco **AP pertence ao segundo quadrante**, por exemplo, queremos dizer que **a extremidade P pertence ao segundo quadrante**.



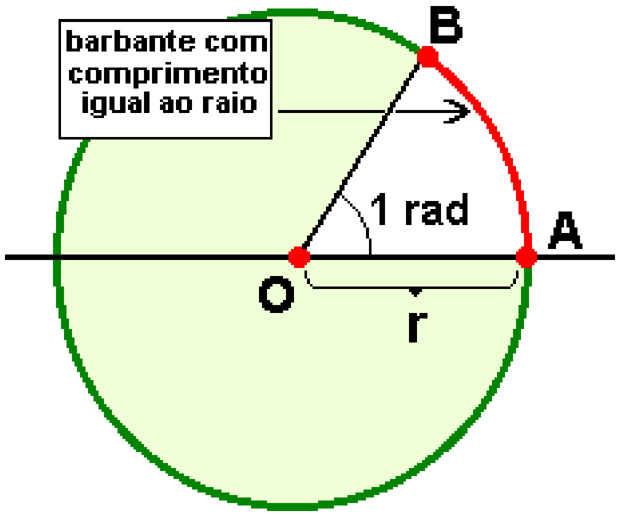
Os quadrantes:
1º Quadrante: $0° < \alpha < 90°$
2º Quadrante: $90° < \alpha < 180°$
3º Quadrante: $180° < \alpha < 270°$
4º Quadrante: $270° < \alpha < 360°$
Os ângulos 0°, 90°, 180°, 270° e 360° são chamados ângulos quadrantais.

Unidades de medidas de ângulos (arcos)

Existem algumas unidades conhecidas com as quais podemos medir um ângulo (ou um arco). A mais conhecida é o ***grau***, mas há algumas outras que podem aparecer no nosso vestibular!!!! Vamos entender como cada uma dessas unidades foi definida.

- **Grau:** Dividindo uma circunferência em 360 partes iguais, ligamos o centro a cada um desses pontos marcados nessa circunferência. Com essa operação conseguimos determinar 360 ângulos centrais. Cada um desses ângulos é chamado de 1 grau.

- **Radiano:** Outra unidade é chamada de radiano. Essa é a mais importantes e é a que mais se usa num curso de trigonometria. Na prática, "cobre-se" um arco na circunferência com um barbante e depois estica-se o barbante. Quando o comprimento do barbante (do arco, na verdade) for igual ao comprimento do raio, o ângulo central mede 1 radiano (1 rad).



Conversão de unidades – grau e radiano

$$180° \_\_\_\_\_\_ \pi \text{ rad}$$

Exercícios

1) Faça as conversões abaixo:

$a)\ 150° \rightarrow radianos$

$$\begin{aligned} &180° \_\_\_\_ \pi rad \\ &150° \_\_\_\_\_\_ x \end{aligned}$$

$$\frac{180°}{150°} = \frac{\pi}{x} \rightarrow \frac{6}{5} = \frac{\pi}{x} \rightarrow x = \frac{5\pi}{6}\ rad$$

Método prático:

$$150°.\frac{\pi}{180°} = \frac{15\pi}{18} = \frac{5\pi}{6}\ rad$$

$b)\ 240° \rightarrow radianos$

$$\mathbf{240°.\frac{\pi}{180°} = \frac{24\pi}{18} = \frac{4\pi}{3}\ rad}$$

$c)\ \frac{5\pi}{3}\ rad \rightarrow graus$

$$\mathbf{\frac{5\pi}{3} = \frac{5.180°}{3} = 5.60° = 300°}$$

$d)\ \frac{7\pi}{6} rad \rightarrow graus$

$$\mathbf{\frac{7\pi}{6} = \frac{7.180°}{6} = 7.30° = 210°}$$

$e)\ 3\,rad \rightarrow graus$

$$\mathbf{180° \ \ldots\ldots..\pi\, rad}$$
$$\mathbf{x \ldots\ldots\ldots 3\, rad}$$

$$\frac{\mathbf{180°}}{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}} \rightarrow \boldsymbol{x.\pi} = \mathbf{180°.3} \rightarrow \boldsymbol{x.\pi} = \mathbf{540°} \rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{540°}}{\boldsymbol{\pi}} \rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{540°}}{\mathbf{3,14}} \rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{171,9°}$$

$f)\ 1\,rad \rightarrow graus$

$$\mathbf{180° \ \ldots\ldots..\pi\, rad}$$
$$\mathbf{x \ldots\ldots\ldots 1\, rad}$$

$$\frac{\mathbf{180°}}{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{1}} \rightarrow \boldsymbol{x.\pi} = \mathbf{180°.1} \rightarrow \boldsymbol{x.\pi} = \mathbf{180°} \rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{180°}}{\boldsymbol{\pi}} \rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{180°}}{\mathbf{3,14}} \rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{57,32°}$$

ARCOS CÔNGRUOS

Quando acontece de termos dois arcos diferentes que terminam na mesma posição da circunferência, dizemos que esses arcos são arcos côngruos.

Exemplos:

60° e 420°. São côngruos, pois estão na mesma posição no ciclo trigonométrico, porém em voltas diferentes.

Assim, podemos ver que qualquer arco β é côngruo com outros infinitos arcos definidos pela soma de β com múltiplos de 360° (ou 2π rad), ou seja, se estamos sobre o arco β e andamos mais 360° (ou 2π rad) sobre a circunferência voltamos para a mesma posição.

Expressão geral dos arcos côngruos

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha = \beta + 360^\circ . k, k \in Z} \\ \boldsymbol{\alpha = \beta + 2.k.\pi, k \in Z} \end{cases}$$

Exercícios

1) Encontre a expressão geral dos arcos abaixo:

$a)\ 750°$

$$\begin{array}{l|l} 750° & 360° \\ \hline 30° & 2 \end{array}$$

$$\mathbf{750° = 2.360° + 30°}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{2\ voltas\ completas} \\ \boldsymbol{O\ menor\ \hat{a}ngulo\ é\ 30°} \\ \boldsymbol{O\ \hat{a}ngulo\ 30°\ é\ chamado\ de\ Primeira\ (ou\ menor) Determinação\ Positiva \rightarrow 1º\ quad.} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Expressão\ geral:\ \alpha = 30° + 360°.k, k \in Z}$$

$b)$ $1630°$

$$\begin{array}{r|l} 1630° & 360° \\ \hline & 4 \\ 190° & \end{array}$$

$$\mathbf{1630° = 4.360° + 190°}$$

$$\begin{cases} \textbf{\textit{4 voltas completas}} \\ \textbf{\textit{O menor ângulo é 190°}} \\ \textbf{\textit{O ângulo 190° é chamado de Primeira (ou menor) Determinação Positiva}} \rightarrow \mathbf{3^{\underline{o}}}\ \textbf{\textit{quad.}} \end{cases}$$

$$\textbf{\textit{Expressão geral}}: \ \boldsymbol{\alpha = 190° + 360°.k, k \in Z}$$

$c)\ \dfrac{23\pi}{4}\ rad$

$$\frac{23\pi}{4} = \frac{23.180°}{4} = 23.45° = 1035°$$

$$\begin{array}{r|l} 1035° & 360° \\ \hline & 2 \\ 315° & \end{array}$$

$$1035° = 2.360° + 315°$$

$$\begin{cases} \textit{2 voltas completas} \\ \textit{O menor ângulo é } 315° \\ \textit{O ângulo } 315° \textit{ é chamado de Primeira (ou menor) Determinação Positiva} \rightarrow 4^{\underline{o}}\ \textit{quad.} \end{cases}$$

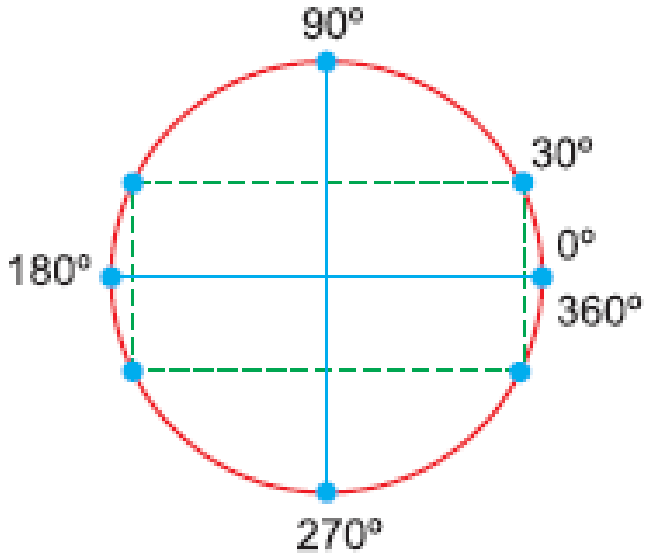
$$\textit{Expressão geral: } \alpha = 315° + 360°.k, k \in Z$$

$$\textit{Como o ângulo foi dado em radianos, temos: } \alpha = 315°.\frac{\pi}{180°} + 2.k.\pi, k \in Z$$

$$\textit{Expressão geral: } \alpha = \frac{7\pi}{4} + 2.k.\pi, k \in Z$$

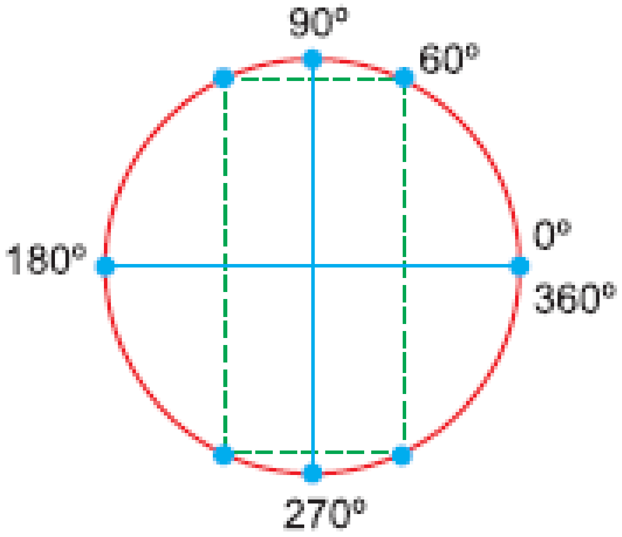
2) Escreva a 1ª determinação positiva dos arcos assinalados em cada ciclo trigonométrico a seguir:

a)



$$\begin{cases} 2^{\underline{o}}\ quadrante \rightarrow 180° - 30° = 150° \\ 3^{\underline{o}}\ quadrante \rightarrow 180° + 30° = 210° \\ 4^{\underline{o}}\ quadrante \rightarrow 360° - 30° = 330° \end{cases}$$

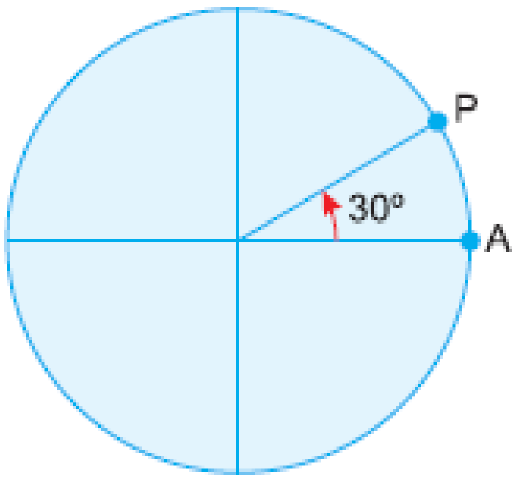
b)



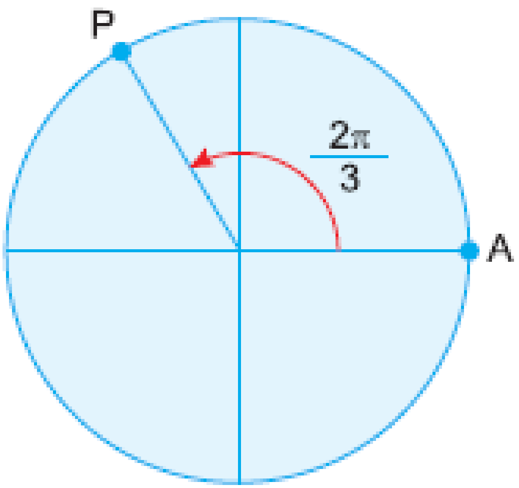
$$\begin{cases} 2^{\underline{o}}\ quadrante \rightarrow 180° - 60° = 120° \\ 3^{\underline{o}}\ quadrante \rightarrow 180° + 60° = 240° \\ 4^{\underline{o}}\ quadrante \rightarrow 360° - 60° = 300° \end{cases}$$

3) Escrever o conjunto das determinações dos arcos assinalados, com extremidades no ponto **P**.

a)



b)



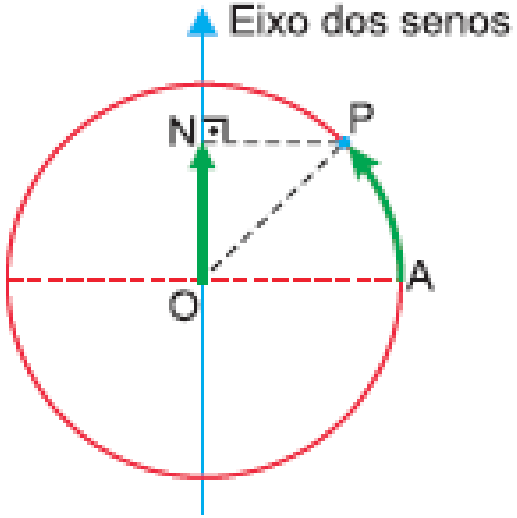
$$a)\ \alpha = 30° + 360°.k, k \in Z$$

$$b)\ \alpha = \frac{2\pi}{3} + 2.k.\pi, k \in Z$$

SENO

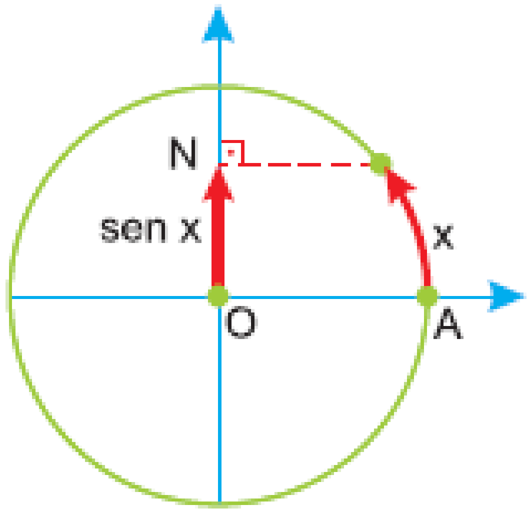
O **seno de um arco trigonométrico** AP , de extremidade P, é a **ordenada do ponto P**.

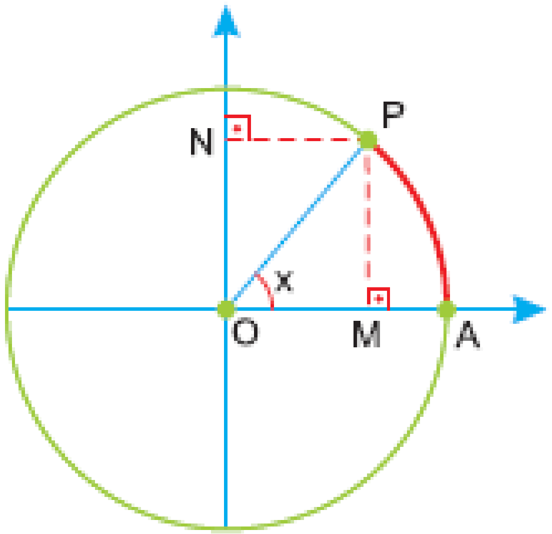
$$\text{sen}\ \overset{\frown}{AP} = ON$$



Observação

A definição é coerente com aquela apresentada no triangulo retângulo.





De fato, se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ então P pertence ao primeiro quadrante e além disso OP = 1 (raio) e MP = ON. Assim sendo, no triângulo OMP retângulo, em M, temos:

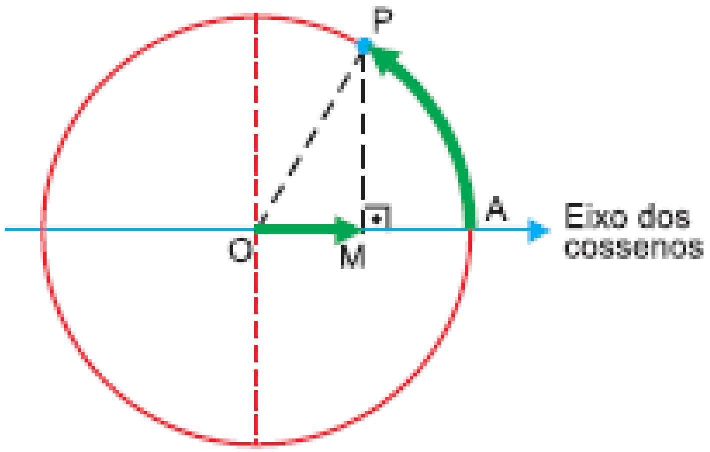
$$\boxed{\text{sen } x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}} \Leftrightarrow \text{sen } x = \frac{MP}{OP} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen } x = \frac{ON}{1} \Leftrightarrow \boxed{\text{sen } x = ON}$$

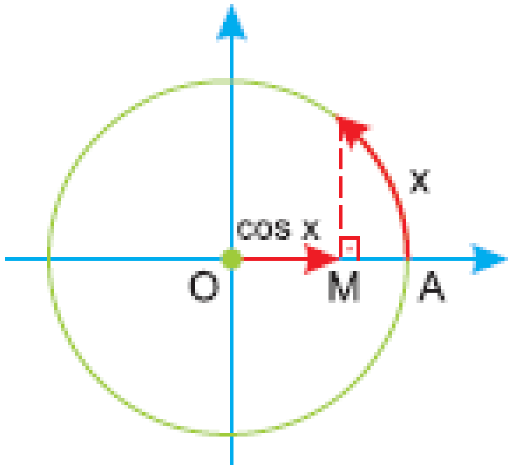
COSSENO

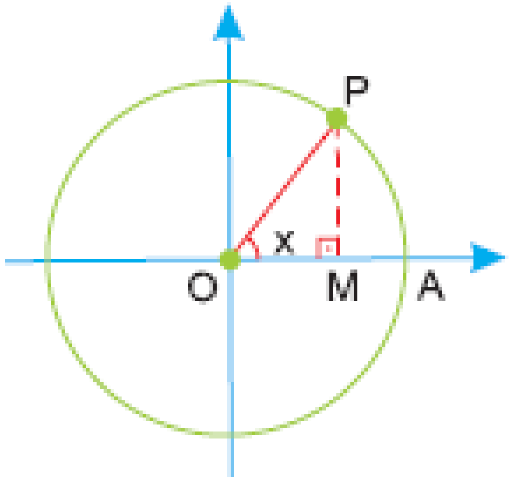
O **cosseno de um arco trigonométrico** AP, de extremidade **P**, é a **abscissa do ponto P**.

$$\cos \overset{\frown}{AP} = OM$$



Observação
A definição é coerente com aquela apresentada no triangulo retângulo.





De fato, se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ então P pertence ao primeiro quadrante e além disso OP = 1 (raio).
Assim sendo, no triângulo OMP retângulo, em M, temos:

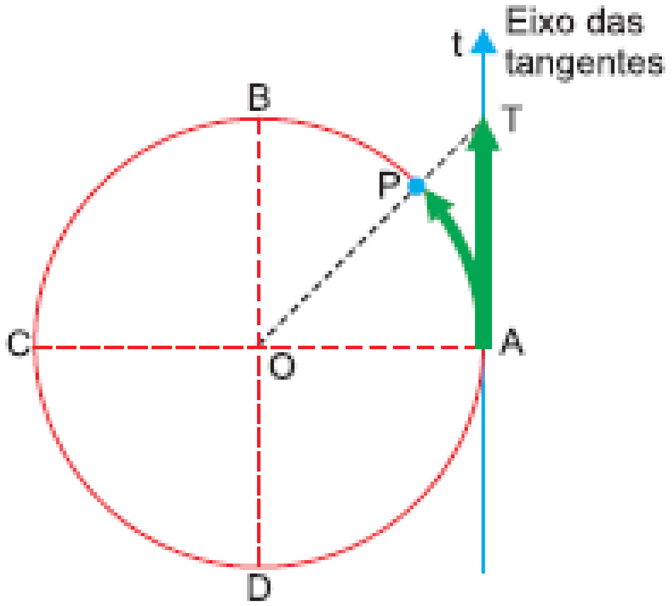
$$\boxed{\cos x = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{OM}{OP} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{OM}{1} \Leftrightarrow \boxed{\cos x = OM}$$

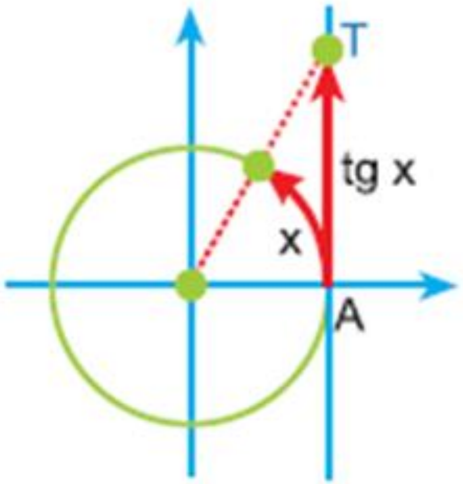
TANGENTE

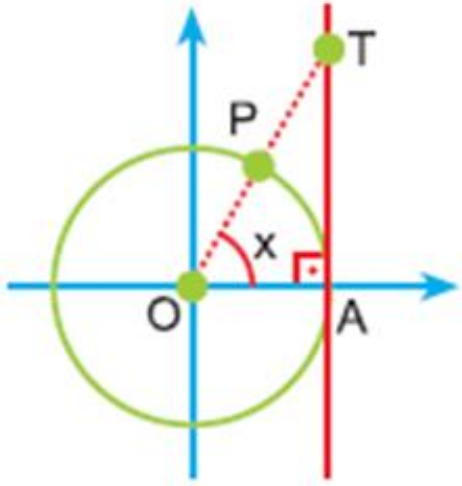
Consideremos, no ciclo trigonométrico de origem A, o eixo **t** perpendicular ao eixo **x** e de origem A, chamado eixo das tangentes.
Seja, ainda, T a intersecção da reta OP com o eixo t.
A tangente do arco trigonométrico AP, de extremidade P, com P ≠ B e P ≠ D, é a medida algébrica do segmento AT.

$$tg\ \overset{\frown}{AP} = AT$$



Observação
A definição é coerente com aquela apresentada no triangulo retângulo.





De fato, se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ então P pertence ao primeiro quadrante e além disso OA = 1 (raio). Assim sendo, no triângulo OAT retângulo, em A, temos:

Assim sendo, no triângulo OAT retângulo em A, temos:

$$\boxed{tg\,x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}} \Leftrightarrow tg\,x = \frac{AT}{OA} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow tg\,x = \frac{AT}{1} \Leftrightarrow \boxed{tg\,x = AT}$$

Outras razões trigonométricas:

COSSECANTE

$$\boldsymbol{cossec\alpha = \frac{1}{sen\alpha}}$$

SECANTE

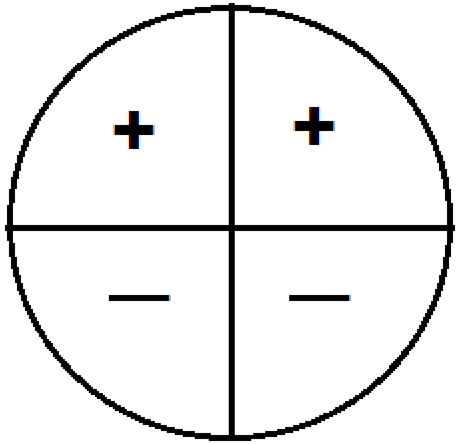
$$\boldsymbol{sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}}$$

COTANGENTE

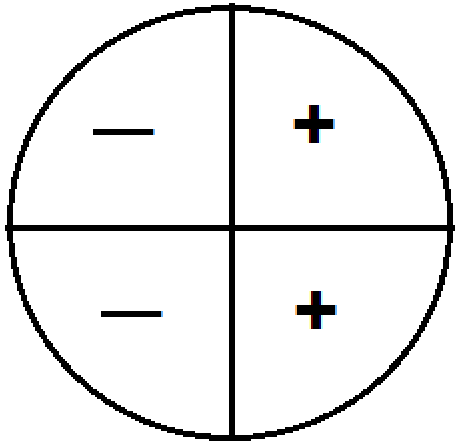
$$\boldsymbol{cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}}$$

Variação de sinal das razões trigonométricas

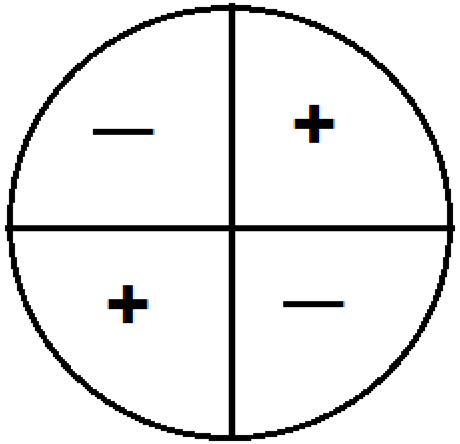
SENO



COSSENO

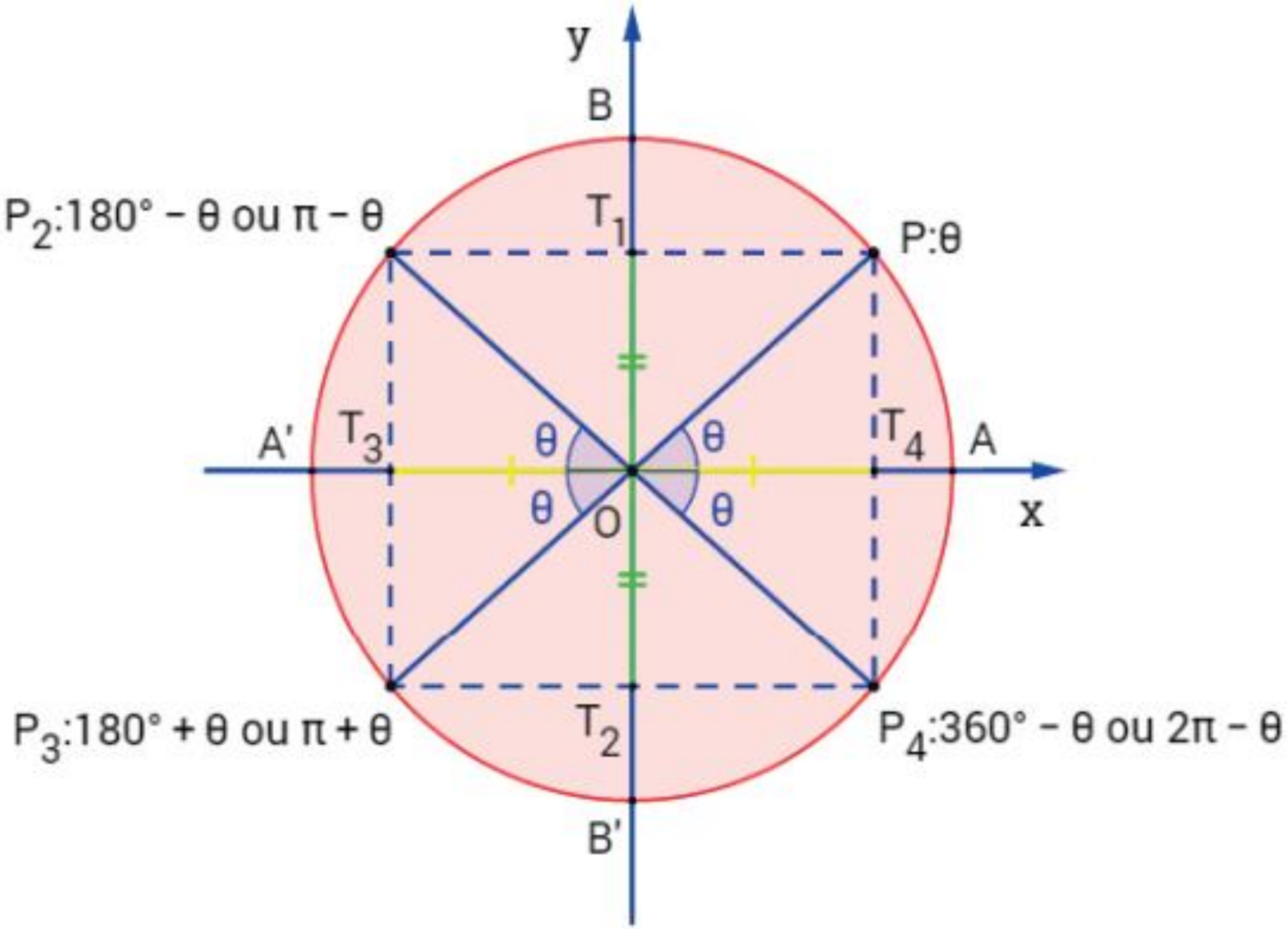


TANGENTE



OBS.: As razões inversas, cossecante, secante e cotangente, têm o mesmo sinal das suas inversas, ou seja, seno, cosseno e tangente, respectivamente.

Redução ao primeiro quadrante



Exercícios

1) Encontre o valor de todas as razões trigonométricas dos arcos abaixo.

$a)\ 120°$ $\quad$ $\boldsymbol{120° \in 2^{\underline{o}}\ quadrante}$

$$sen120° = +sen(180° - 120°) = +sen60° = +\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos120° = -cos(180° - 120°) = -cos60° = -\frac{1}{2}$$

$$tg120° = -tg(180° - 120°) = -tg60° = -\sqrt{3}$$

$$cossec120° = \frac{1}{sen120°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$sec120° = \frac{1}{cos120°} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$cotg120° = \frac{1}{tg120°} = \frac{1}{-\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$b)\ 210°$ $\quad\quad$ $\boldsymbol{210° \in 3°\ quadrante}$

$$\boldsymbol{sen210° = -sen(210° - 180°) = -sen30° = -\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{cos210° = -cos(210° - 180°) = -cos30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boldsymbol{tg210° = +tg(210° - 180°) = +tg30° = +\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\boldsymbol{cossec210° = \frac{1}{sen210°} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2}$$

$$\boldsymbol{sec210° = \frac{1}{cos210°} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

$$\boldsymbol{cotg210° = \frac{1}{tg210°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3.\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}}$$

$c)\ 315°$ $\quad$ $\mathbf{315° \in 4° \mathit{quadrante}}$

$$sen315° = -sen(360° - 315°) = -sen45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos315° = +cos(360° - 315°) = +cos45° = +\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg315° = -tg(360° - 315°) = -tg45° = -1$$

$$cossec315° = \frac{1}{sen315°} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{2.\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$sec315° = \frac{1}{cos315°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2.\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$cotg315° = \frac{1}{tg315°} = \frac{1}{-1} = -1$$