LOGARITMOS

DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

PROFESSOR MARCOS JOSÉ

<u>Logaritmo:</u> Para entender o que é logaritmo, considere uma potência de base positiva e diferente de 1. Por exemplo: $3^4 = 81$

Ao expoente dessa potência damos o nome de logaritmo. Dizemos que 4 é o logaritmo de 81 na base 3. Em notação:

$$3^4 = 81 \leftrightarrow \log_3 81 = 4$$

<u>Definição:</u> Sejam ***a*** e ***b*** números reais positivos e ***b*** ≠ 1. Chama-se logaritmo de ***a*** na base ***b*** ao expoente ***x*** tal que $b^x = a$. Em notação:

$$b^x = a \leftrightarrow \log_b a = x$$

Onde:

- ***a*** é chamado de logaritmando e ***a*** > 0 .
- ***b*** é chamado de base do logaritmo e ***b*** > 0 e ***b*** ≠ 1.
- ***x*** é chamado de logaritmo de ***a*** na base ***b***.

Exemplos:

1) $\log_2 16$ é $o\ expoente\ x\ tal\ que\ 2^x = 16. Logo, x = 4. Assim, \log_2 16 = 4.$

2) $log_5^{\frac{1}{25}}$ é $o\ expoente\ x\ tal\ que\ 5^x = \frac{1}{25}. Logo, x = -2. Assim, log_5^{\frac{1}{25}} = -2.$

<u>Exercícios</u>

1) Encontre os logaritmos abaixo, usando a definição.

$a)\ \log_4 64$

$$\mathbf{\log_4 64 = \boldsymbol{x} \rightarrow 4^{\boldsymbol{x}} = 64 \rightarrow 4^{\boldsymbol{x}} = 4^3 \rightarrow \boldsymbol{x} = 3 \rightarrow \boldsymbol{logo} \rightarrow \log_4 64 = 3}$$

$b)\ \log_9 243$

$$\boldsymbol{log_9 243 = x \rightarrow 9^x = 243 \rightarrow (3^2)^x = 3^5 \rightarrow 3^{2x} = 3^5 \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2}}$$

$c)\ \log_{625} 125$

$$\boldsymbol{log_{625} 125 = x \rightarrow 625^x = 125 \rightarrow (5^4)^x = 5^3 \rightarrow 5^{4x} = 5^3 \rightarrow 4x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{4}}$$

$d)\ \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{32}$

$$\boldsymbol{log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{32} = x \rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{32} \rightarrow \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2}}$$

Propriedades imediatas dos logaritmos

Considerando os números reais positivos ***a*** e ***b***, com **a** ≠ 1, temos as propriedades abaixo:

P1) $\log_a a = 1$

P2) $\log_a 1 = 0$

P3) $\log_a a^m = m$

P4) $a^{log_a^b} = b$

Exercícios

1) Encontre os logaritmos abaixo, usando as propriedades imediatas.

$a)\ log_5 5$

$\boldsymbol{log_5 5 \rightarrow pela\ P1 \rightarrow log_5 5 = 1}$

$b)\ log_{13} 1$

$\boldsymbol{log_{13} 1 \rightarrow Pela\ P2 \rightarrow log_{13} 1 = 0}$

$c)\ log_7(7)^5$

$\boldsymbol{log_7(7)^5 \rightarrow Pela\ P3 \rightarrow log_7(7)^5 = 5}$

$d)\ 7^{log_7 6}$

$\boldsymbol{7^{log_7 6} \rightarrow Pela\ P4 \rightarrow 7^{log_7 6} = 6}$

2) Calcule o valor da expressão E = $4^{log_4^5} + log_7^7 + log_{0,8}^1 - log_3^{3^4}$

Vamos encontrar o valor de cada termo da expressão.

1º) $4^{log_4^5}$. Pela propriedade P4, temos $4^{log_4^5} = 5$.

2º) log_7^7. Pela propriedade P1, temos $log_7^7 = 1$.

3º) $log_{0,8}^1$. Pela propriedade P2, temos $log_{0,8}^1 = 0$.

4º) $log_3^{3^4}$. Pela propriedade P3, temos $log_3^{3^4} = 4$.

Portanto, E = 5 + 1 + 0 – 4. Logo, E = 2

Propriedades operatórias dos logaritmos

Sendo a, b e c números reais positivos e a ≠ 1, temos mais algumas propriedades.

P5) Logaritmo do produto: Em uma mesma base, o logaritmo do produto de dois ou mais números positivos é igual a soma dos logaritmos de cada um desses números. Em notação:

$$log_a^{b.c} = log_a^b + log_a^c$$

P6) Logaritmo do quociente: Em uma mesma base, o logaritmo do quociente de dois números positivos é igual a diferença dos logaritmos de cada um desses números. Em notação:

$$log_a^{\frac{b}{c}} = log_a^b - log_a^c$$

P7) Logaritmo da potência: O logaritmo de uma potência de base positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência. Em notação:

$$log_a^{b^m} = m.\,log_a^b$$

P8) Mudança de base: Em alguns casos, precisamos realizar cálculos com logaritmos de bases diferentes. Muitas vezes é conveniente fazer uma mudança de base. Então, podemos transformar um logaritmo numa base **a** em um logaritmo numa base **c**, com **c** > 0 e **c** ≠ 1. Em notação:

$$log_a^b = \frac{log_c^b}{log_c^a}$$

Exercícios

1) Considere que $log_{10}^{2} = 0{,}30\ e\ log\ _{10}^{3} = 0{,}48$. Calcule:

a) log_{10}^{6}

Como sabemos os logaritmos de 2 e de 3, podemos escrever 6 como sendo 2.3. Assim:

$$\boldsymbol{log_{10}^{6} = log_{10}^{2.3} \rightarrow Pela\ P5 \rightarrow log_{10}^{6} = log_{10}^{2} + log_{10}^{3}}$$

$$\boldsymbol{log_{10}^{6} = 0,30 + 0,48}$$

$$\boldsymbol{log_{10}^{6} = 0,78}$$

b) $log_{10}^{1,5}$

Como sabemos os logaritmos de 2 e de 3, podemos escrever 1,5 como sendo $\frac{3}{2}$. Assim:

$$log_{10}^{1,5} = log_{10}^{\frac{3}{2}} \rightarrow Pela\ P6 \rightarrow log_{10}^{1,5} = log_{10}^{3} - log_{10}^{2}$$

$$log_{10}^{1,5} = 0,48 - 0,30 \quad \rightarrow log_{10}^{1,5} = 0,18$$

c) log_{10}^{108}

Como sabemos os logaritmos de 2 e de 3, podemos escrever 108 como sendo $2^2.3^3$. Assim:

$$log_{10}^{108} = log_{10}^{2^2.3^3} \quad Pela\ P5 \rightarrow log_{10}^{108} = log_{10}^{2^2} + log_{10}^{3^3}$$

$$Pela\ P7 \rightarrow log_{10}^{108} = 2.log_{10}^{2} + 3.log_{10}^{3}$$

$$log_{10}^{108} = 2.0,30 + 3.0,48 = 0,60 + 1,44 = 2,04$$

d) $log\,48$

$48 = 2^4.3 \rightarrow log\,48 = log\,2^4.3 \rightarrow Pela\ P5 \rightarrow log\,48 = log 2^4 + log\,3$

$Pela\ P7 \rightarrow log\,48 = 4.\,log\,2 + log\,3 \rightarrow log\,48 = 4.\,0,30 + 0,48 = 1,20 + 0,48 = 1,68$

e) $log\,40$

$40 = 2^3.5 \rightarrow$ $N\tilde{a}o\ foi\ dado\ o\ \ log\,5\,,por\acute{e}m$ é $f\acute{a}cil\ mostrar\ que\ \ log\,5 = 1 - log\,2$

$log\,40 = log\,2^3.5 \rightarrow Pela\ P5 \rightarrow log\,40 = log\,2^3 + log\,5 \rightarrow Pela\ P7 \rightarrow log\,40 = 3.\,log\,2 + log\,5$

$log\,40 = 3.\,log\,2 + 1 - log\,2 \rightarrow log\,40 = 3.\,0,3 + 1 - 0,3 = 0,9 + 0,7 = 1,6$

$OBS.\,log\,5 = log\,\dfrac{10}{2} \rightarrow Pela\ P6 \rightarrow log\,5 = log\,10 - log\,2 \rightarrow Pela\ P1 \rightarrow log\,5 = 1 - log\,2$

f) $log\,15$

Solução 1:

$$15 = 3.5 \rightarrow log\,15 = log\,3.5 \rightarrow Pela\ P5 \rightarrow log\,15 = log\,3 + log\,5 \rightarrow log\,15 = log\,3 + 1 - log\,2$$

$$log\,5 = 0,48 + 1 - 0,30 = 1,18$$

Solução 2:

$$log\,15 = log\,\frac{30}{2} \rightarrow Pela\ P6 \rightarrow log\,15 = log\,30 - log\,2 \rightarrow log\,15 = log\,3.10 - log\,2$$

$$Pela\ P6 \rightarrow log\,15 = log\,3 + log\,10 - log\,2 \rightarrow log\,15 = 0,48 + 1 - 0,30 = 1,18$$

g) $log\ 0{,}24$

$$log\ 0,24 = log\frac{24}{100} \rightarrow Pela\ P6 \rightarrow log\ 0,24 = log\ 24 - log100$$

$$24 = 2^3.3\ e\ 100 = 10^2 \rightarrow log\ 0,24 = log\ 2^3.3 - log\ 10^2$$

$$Pela\ P5 \rightarrow log\ 0,24 = log\ 2^3 + log\ 3 - log\ 10^2$$

$$Pela\ P7 \rightarrow log\ 0,24 = 3.log\ 2 + log\ 3 - log\ 10^2 \rightarrow Pela\ P3 \rightarrow log\ 0,24 = 3.log\ 2 + log\ 3 - 2$$

$$log\ 0,24 = 3.0,30 + 0,48 - 2 \rightarrow log\ 0,24 = 0,90 + 0,48 - 2 = -0,62$$

$h)\ log_{16} 9$

$$\text{Pela P8} \rightarrow log_{16} 9 = \frac{log\, 9}{log\, 16} \rightarrow log_{16} 9 = \frac{log\, 3^2}{log\, 2^4} \rightarrow \text{Pela P7} \rightarrow log_{16} 9 = \frac{2.\, log\, 3}{4.\, log\, 2}$$

$$log_{16} 9 = \frac{2.\,0,48}{4.\,0,3} = \frac{0,48}{2.\,0,3} = \frac{0,48}{0,6} = 0,8$$