PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)

RESUMO TEÓRICO E EXERCÍCIOS

PROFESSOR MARCOS JOSÉ

Progressão Geométrica

Uma Progressão Geométrica é a sequência numérica na qual é constante o quociente da divisão de cada termo, a partir do segundo, pelo antecedente. Esse quociente é constante, representado por **q** e chamado de razão.

Termo Geral de uma Progressão Geométrica

Considere a PG genérica da forma (a_1, a_2, a_3, ... , a_n, ...) cuja a razão é q.

De acordo com a definição podemos escrever:

$\mathbf{a_2 = a_1.q}$
$\mathbf{a_3} = \mathbf{a_2\ .q = (a_1\ .q).q} = \mathbf{a_1}\ .\mathbf{q^2}$
$\mathbf{a_4 = a_3\ .q = (a_1\ .q^2)\ .q} = \mathbf{a_1\ .q^3}$
....

Podemos deduzir das igualdades acima que: $\boldsymbol{a_n = a_1 . q^{n-1}}$ (Fórmula do Termo Geral da PG).
Dessa fórmula, temos que:
→ $\mathbf{a_n}$ é o termo de ordem **n** (n-ésimo termo);
→ **q** é a razão;
→ $\mathbf{a_1}$ é o primeiro termo da Progressão Geométrica (PG).

Assim, temos que:

$$\begin{cases} a_{20} = a_1 . q^{19} \\ a_{36} = a_1 . q^{35} \\ a_{51} = a_1 . q^{50} \end{cases}$$

Exercícios

1) Considere a PG (3, 6, 12, ...). Determine:
a) O primeiro termo;
b) A razão;
c) O quarto termo;
d) O décimo termo.

$\boldsymbol{a)\ a_1 = 3}$ $\boldsymbol{b)\ q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2}$ $\boldsymbol{c)\ a_4 = 12.2 = 24}$

$\boldsymbol{d)\ a_{10} = a_1 . q^9 \rightarrow a_{10} = 3.2^9 \rightarrow a_{10} = 3.512 \rightarrow a_{10} = 1536}$

2) Determine o número de termos da PG $(81, 27, 9, ..., \frac{1}{9})$.

$$\begin{cases} a_1 = 81 \\ q = \frac{27}{81} = \frac{1}{3} \\ a_n = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$a_n = a_1 . q^{n-1} \to \frac{1}{9} = 81 . \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \to (9)^{-1} = (3)^4 . \left(3^{-1}\right)^{n-1} \to \left(3^2\right)^{-1} = (3)^4 . (3)^{-n+1}$$

$$3^{-2} = 3^{-n+5} \to -2 = -n + 5 \to n = 7$$

3) Qual é o primeiro termo de uma PG na qual o 11° termo é 3072 e a razão é 2?

$$\boldsymbol{a_{11} = a_1 . q^{10} \rightarrow 3072 = a_1 . 2^{10} \rightarrow 3072 = a_1 . 1024 \rightarrow a_1 = 3}$$

4) O décimo termo da PG (3, 6, 12, …) é igual a:

a) 512 b) 256 c) 1024 d) 768 e) 1536

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ q = \dfrac{6}{3} = 2 \\ n = 10 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{a_{10} = a_1 . q^9 \rightarrow a_{10} = 3 . 2^9 \rightarrow a_{10} = 3 . 512 \rightarrow a_{10} = 1536}$$

$\boldsymbol{GABARITO: E}$

5) Numa PG $a_3 = \frac{1}{3}$ e $a_5 = \frac{1}{12}$. Se a PG possui razão positiva, encontre o sexto termo.

$$\begin{cases} a_3 = \frac{1}{3} \to a_1 . q^2 = \frac{1}{3} \\ a_5 = \frac{1}{12} \to a_1 . q^4 = \frac{1}{12} \end{cases} \to \textit{Dividindo uma equação pela outra} \to \frac{a_1 . q^2}{a_1 . q^4} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{12}}$$

$$\frac{1}{q^2} = \frac{1}{3} . \frac{12}{1} \to \frac{1}{q^2} = 4 \to q^2 = \frac{1}{4} \to q = \pm\frac{1}{2} \to Mas, q > 0 \to q = \frac{1}{2}$$

$$a_1 . q^2 = \frac{1}{3} \to a_1 . \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} \to a_1 . \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \to a_1 = \frac{4}{3}$$

$$a_6 = a_1 . q^5 \to a_6 = \frac{4}{3} . \left(\frac{1}{2}\right)^5 \to a_6 = \frac{4}{3} . \frac{1}{32} \to a_6 = \frac{1}{24}$$

Classificação de PG

1) PG crescente é quando cada termo é maior que o anterior.

Exemplos

1) (1, 2, 4, 8, 16, ...) – PG com termos positivos. q > 1.
2) (-54, -18, -6, -2, ...) – PG com termos negativos. 0 < q < 1.

2) PG constante é quando cada termo é igual ao anterior.

Exemplos

1) (0, 0, 0, 0, 0) – PG com todos termos nulos. $a_1 = 0$ e q é qualquer número real.
2) (5, 5, 5, 5, 5, ...) – PG com termos iguais e não nulos. q = 1.

3) PG decrescente é quando cada termo é menor que o anterior.
Exemplos

1) (-1, -2, -4, -8, -16, ...) – PG com termos negativos. $q > 1$.

2) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\right)$ - PG com termos positivos. $0 < q < 1$.

4) PG alternante é quando cada termo tem sinal contrário ao do termo anterior. Isso acontece quando a razão da PG é negativa.
Exemplos

1) (4, -4, 4, -4, 4, ...)
2) (2, -4, 8, -16, 32, ...)

5) PG estacionária é quando $a_1 \neq 0$ e os demais termos são iguais a zero. Isso acontece quando a razão da PG é igual a zero.
Exemplo

1) (5, 0, 0, 0, 0)

Propriedades de uma P.G.

P1: Em toda PG, um termo, excluindo os extremos, é a média geométrica dos termos imediatamente anterior e posterior.

Exemplo

PG (2, 4, 8, 16, 32, 64)

$4^2 = 2.8\ ;\ 8^2 = 4.16\ ;\ 16^2 = 8.32\ ;\ 32^2 = 16.64$

$(a_1, a_2, a_3)\ uma\ PG\ então\text{:}\ (a_2)^2 = (a_1).(a_3)$ $\qquad (a_2) = \sqrt{(a_1).(a_3)}$

P2: O produto dos termos equidistantes dos extremos de uma PG é igual ao produto dos extremos.

Exemplo

PG (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128)

Temos então: 2 . 128 = 4 . 64 = 8 . 32 = 16.16

Notações especiais

Para a obtenção de uma PG com 3 ou 4 termos é muito prática a notação seguinte:

1ª) para 3 termos: $\left(\frac{x}{q}, x, x.q\right)$

2ª) para 4 termos: $\left(\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, x.q, x.q^3\right)$

Exercício

1) Encontre uma PG de três termos tal que a soma dos termos é 14 e seu produto é 64.

$$\left(\frac{x}{q}, x, x.q\right) \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{q} + x + x.q = 14 \\ \frac{x}{q}.x.x.q = 64 \rightarrow x^3 = 64 \rightarrow x = 4 \end{cases}$$

$$\frac{4}{q}+4+4.q=14\rightarrow\frac{4}{q}+4.q=10\rightarrow 4+4.q^2=10.q\rightarrow 2.q^2-5.q+2=0$$

$$q=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4.2.2}}{2.2}\rightarrow q=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}\rightarrow q=\frac{5\pm 3}{4}\rightarrow\begin{cases} q_1=\dfrac{5+3}{4}=2 \\ q_2=\dfrac{5-3}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4\ e\ q=2\rightarrow PG=\left(\dfrac{4}{2},4,4.2\right)=(2,4,8) \\ x=4\ e\ q=\dfrac{1}{2}\rightarrow PG=\left(\dfrac{4}{\frac{1}{2}},4,4.\dfrac{1}{2}\right)=(8,4,2)\end{cases}$$

2) Na PG $(x+1, x+3, x+4, \dots)$ ache o quarto termo.

$$(x+3)^2 = (x+1).(x+4) \rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 4x + x + 4 \rightarrow 6x + 9 = 5x + 4 \rightarrow x = -5$$

$$PG = (-5+1, -5+3, -5+4, \dots) = (-4, -2, -1, \dots)$$

$$q = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = a_3 . q \rightarrow a_4 = (-1).\frac{1}{2} \rightarrow a_4 = -\frac{1}{2}$$

Soma dos n primeiros termos de uma PG finita

Seja a PG $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$.Para o cálculo da soma dos **n** primeiros termos $\mathbf{S_n}$, vamos considerar que: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$. Assim:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Exercícios

1) Calcule a soma dos seis primeiros termos da PG (–2, 4, –8,...).

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ q = \dfrac{4}{-2} = -2 \\ n = 6 \end{cases} \qquad S_6 = \frac{(-2).\left((-2)^6 - 1\right)}{-2-1} \rightarrow S_6 = \frac{(-2).(63)}{-3} \rightarrow S_6 = \frac{-126}{-3} \rightarrow S_6 = 42$$

2) Calcule a soma dos oito primeiros termos da PG (81, 27, 9, ...).

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$\begin{cases} a_1 = 81 \\ q = \dfrac{27}{81} = \dfrac{1}{3} \\ n = 8 \end{cases}$$

$$S_8 = \frac{81.\left(\left(\frac{1}{3}\right)^8 - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} \rightarrow S_8 = \frac{81.\left(\frac{1}{6561} - 1\right)}{-\frac{2}{3}} \rightarrow S_8 = -81.\frac{3}{2}.\left(-\frac{6560}{6561}\right)$$

$$S_8 = \frac{3}{2}.\frac{6560}{81} \rightarrow S_8 = \frac{3280}{27}$$

Soma dos termos uma Progressão Geométrica infinita

Se $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ é uma PG com razão q, tal que $-1 < q < 1$, então:

$$\boldsymbol{S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \frac{a_1}{1-q}}$$

Exercícios

1) Calcule a soma dos termos da PG $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\right)$.

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_1 = 1} \\ \boldsymbol{q = \dfrac{\frac{1}{3}}{1} = \dfrac{1}{3}} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}}$$

2) Calcule *x* nos casos abaixo:

$$a)\ x + \frac{2x}{3} + \frac{4x}{9} + \cdots = 4$$

$$\boldsymbol{Soma\ infinita\ de\ PG} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a_1 = x} \\ \boldsymbol{q = \dfrac{\frac{2x}{3}}{x} = \dfrac{2x}{3} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{3}} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\frac{a_1}{1-q} = 4 \rightarrow \frac{x}{1-\frac{2}{3}} = 4 \rightarrow \frac{x}{\frac{1}{3}} = 4 \rightarrow x = \frac{4}{3}}$$

$$b)\ x-\frac{x}{3}+\frac{x}{2}-\frac{x}{9}+\frac{x}{4}-\cdots=1$$

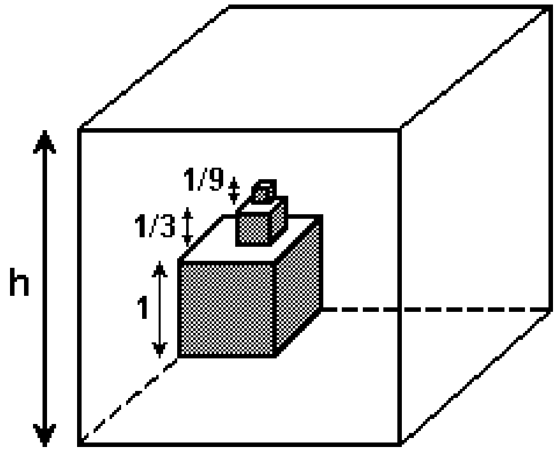
$$\left(x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\cdots\right)-\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{9}+\cdots\right)=1$$

$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\cdots=\frac{a_1}{1-q}=\frac{x}{1-\frac{1}{2}}=\frac{x}{\frac{1}{2}}=2x$$

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{9}+\cdots=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{x}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{x}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{x}{3}.\frac{3}{2}=\frac{x}{2}$$

$$2x-\frac{x}{2}=1\rightarrow 4x-x=2\rightarrow 3x=2\rightarrow x=\frac{2}{3}$$

3) No interior de uma sala, na forma de um paralelepípedo com altura h, empilham-se cubos com arestas de medidas 1, 1/3, 1/9, 1/27, e assim por diante, conforme mostra a figura.



O menor valor para a altura h, se o empilhamento pudesse ser feito indefinidamente, é:

a) 3
b) 5/2
c) 7/3
d) 2
e) 3/2

$$\boldsymbol{h = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots \rightarrow h = \frac{a_1}{1-q} \rightarrow h = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \rightarrow h = \frac{1}{\frac{2}{3}} \rightarrow h = \frac{3}{2}}$$

$\boldsymbol{GABARITO: E}$

4) Determine o valor de x na equação x + (x/2) + (x/4) + (x/8) + ... = 10.

$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\cdots=\frac{a_1}{1-q}=\frac{x}{1-\frac{1}{2}}=\frac{x}{\frac{1}{2}}=2x$$

$$2x=10\rightarrow x=5$$

5) Qual é o valor da soma: 20 + 10 + 5 + 2,5 +...?

$$20+10+5+2,5+\cdots=\frac{a_1}{1-q}=\frac{20}{1-\frac{1}{2}}=\frac{20}{\frac{1}{2}}=40$$

<u>Interpolação de uma Progressão Geométrica (P.G.)</u>: Interpolar ou inserir "**<u>k</u>**" meios geométricos entre dois extremos $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_n}$, significa formar uma P.G. de n = k + 2 termos onde $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_n}$ são os extremos. Como $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_n}$ são sempre dados, basta determinar a razão **<u>q</u>**.

Exercício

1) Interpolar 8 meios geométricos entre 5 e 2560.

PG = (5, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, 2560)

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{10} = 2560 \\ n = 10 \end{cases} \qquad a_{10} = a_1 . q^9 \to 2560 = 5 . q^9 \to 512 = q^9 \to 2^9 = q^9 \to 2 = q$$

$$PG = (5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560)$$